

УДК 541.64:539.199

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И КИНЕТИКА ПЕРЕХОДОВ ФРЕДЕРИКСА В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ<sup>1</sup>

© 2005 г. Э. Л. Аэро

Институт проблем машиностроения Российской академии наук  
199178 Санкт-Петербург, Большой пр., 61

Поступила в редакцию 24.01.2005 г.

Принята в печать 04.04.2005 г.

Рассмотрены сильно нелинейные ориентационные колебания нематического жидкого кристалла в дестабилизирующем магнитном поле. Проанализированы переходы Фредерикса между лево- и правоизакрученными состояниями структуры. Выведены дисперсионные соотношения, связывающие средние частоты колебаний с величиной постоянного магнитного поля, толщиной слоя и материальными константами без диссипации и с ее учетом. Обнаружены пульсирующие режимы колебаний с постоянной амплитудой (но убывающей частотой) при наличии сильной диссипации (за счет вращательной вязкости), управляемые быстро (по экспоненциальному закону) спадающим во времени магнитным полем.

Переходы Фредерикса в нематиках (из однородно ориентированного состояния в неоднородное, деформированное) принято рассматривать как релаксационные, пренебрегая вращательной инерцией частиц, кластеров, роев. Подобный подход оправдан в теории малых колебаний ссылкой на высокий уровень частот ( $\sim 10^9$  Гц), ниже которого ориентационные волны сильно затухают. При частотах менее  $10^6$  Гц динамические процессы носят уже диффузионный характер, когда инерционные эффекты совсем не проявляются. В нелинейной теории предсказываются слабозатухающие моды инерционных колебаний при низких частотах. Они появляются в дестабилизирующих структуру нематика магнитных полях, превышающих критическое поле Фредерикса, когда возникает двухуровневый упругий потенциал с двумя эквивалентными ямами, разделенными потенциальным барьером. Вершине барьера соответствует неустойчивое состояние равновесия – однородная ориентация ортогональна вектору магнитного поля **H**. Большие ориентационные колебания около неустойчивого состояния равновесия (колебательные переходы Фредерикса) и составляют предмет исследования настоящей статьи. Речь пойдет о симметричных нелинейных ко-

лебаниях кручения структуры нематика в плоском слое и однородном магнитном поле, когда одинаковые закрутки влево и вправо периодически сменяют друг друга. При этом интерес представляют эффекты не только инерции, но и затухания, связанного с вращательным трением, которые проявляют себя совсем иначе, чем при малых колебаниях около положения устойчивого состояния равновесия.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интересующие нас моды возникают в дестабилизирующем магнитном поле (напряженности  $H$ ), которое направлено ортогонально граничной ориентации директора  $l_s$ , одинаковой для обеих границ ( $x = +h/2, -h/2$ ). Векторы **H** и **l** лежат в плоскости слоя (рис. 1). При этом

$$\begin{aligned} H_z &= H, \quad H_x = H_y = l_x = 0 \\ l_z &= \cos\Phi, \quad (\mathbf{H}\mathbf{l}) = H \sin\Phi, \quad \Phi = \Phi(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно,  $\Phi$  – это угол взаимной ориентации векторов **H** и **l**, лежащих в плоскости слоя (z). Он является дополнительным углом между указанными векторами.

На границах слоя примем условия

$$\Phi\left(\pm\frac{h}{2}, t\right) = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Работа подготовлена к 100-летнему юбилею Евгения Васильевича Кувшинского.

E-mail: aero@microm.ipme.ru (Аэро Эрон Людикович).

В статике подобное конкурирующее расположение векторов магнитного поля и директора приводит в конечном счете к переходу Фредерикаса, т.е. к потере устойчивости первоначально однородной конфигурации поля директора после достижения порога  $H_\Phi$ . В результате возникает закрученное состояние структуры нематика.

Будем интересоваться большими колебаниями углового поля  $\Phi(x, t)$  как вблизи, так и вдали от порога Фредерикаса  $H_\Phi$ . Рассмотрим симметричные (во времени) или двусторонние колебания, когда структура закручивается попеременно “влево” и “вправо”, переходя через состояние неустойчивого равновесия. Обозначив соответствующий ему момент времени как  $t = T/2$ , примем следующие начальные условия:

$$\Phi_e = \Phi(0, 0) = \Phi(0, T) \quad (3)$$

$$\Phi(x, T/2) = 0 \quad (4)$$

Первое представляет собой по существу определение угловой амплитуды через максимальное отклонение  $\Phi_e$  в центре слоя в соответствующие моменты времени  $t = 0$  и  $t = T$ . По-видимому,  $T$  – это полупериод колебаний. Второе соотношение означает, что неустойчивому состоянию равновесия (в момент времени  $T/2$ ) соответствует незакрученная структура. Более общие начальные условия выдвигать нецелесообразно. Дело в том, что уравнение ориентационного равновесия нематика в общем виде не решается. Ниже будут предложены интересные частные решения, параметры которых полностью определяются заданными начальными и граничными условиями.

Будем исходить из общего вида нелинейного уравнения крутильных колебаний нематика с учетом вращательной вязкости [1]

$$J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \chi H^2 \sin 2\Phi + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5)$$

Здесь  $J$  – средний (по малому объему) молекулярный или кластерный момент инерции,  $k$  – упругий модуль кручения Озенна–Франка,  $\chi$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости нематика,  $\gamma$  – вращательная вязкость.

Выбор кручения (в отличие от изгибных деформаций) позволяет избежать гидродинамических

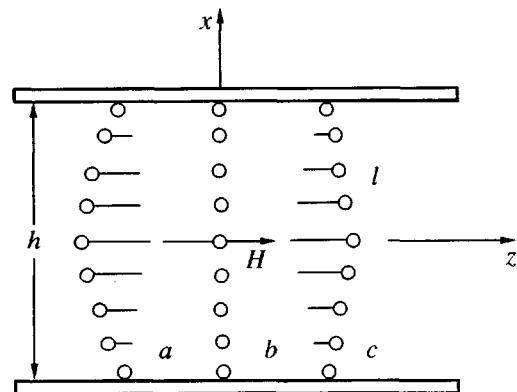


Рис. 1. Конфигурация поля директора в дестабилизирующем магнитном поле  $H$ :  $a$  и  $c$  – закрученные влево и вправо конфигурации,  $b$  – неустойчивая (при  $H > H_\Phi$ ) и устойчивая (при  $H < H_\Phi$ ) однородная ориентация нематика.

ких ( $\sim \text{rot } v$ ) диссипативных слагаемых в уравнении (5). Без учета вращательной вязкости оно сводится к нелинейному уравнению типа синус–Гордона [2]

$$J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \chi H^2 \sin 2\Phi \quad (6)$$

Правда, во многих случаях здесь рассматривается другой знак перед нелинейным слагаемым. Применительно к нематику это соответствовало бы случаю стабилизирующего поля, при котором переходов Фредерикаса не происходит. Вначале рассмотрим уравнение (6), а влиянию вращательной вязкости посвятим последние разделы статьи.

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ БЕЗ ДИССИПАЦИИ

Исследуем симметричные (двусторонние) колебания около положения неустойчивого равновесия. Соответствующее строгое решение уравнения (6) может быть найдено своеобразным методом разделения переменных согласно [2]. Для этого вводятся одномерные вспомогательные функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi(x, t)}{2} = \Phi_1 / \Phi_2, \quad \Phi_1 = \Phi_1(t), \quad \Phi_2 = \Phi_2(x) \quad (7)$$

После его подстановки в уравнение (6) получим для вспомогательных функций два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$(\partial\Phi_1/\partial t)^2 = \bar{a}^2(A_1 - \Phi_1^2)(B_1 + \Phi_1^2) \quad (8)$$

$$(\partial\Phi_2/\partial x)^2 = \bar{a}^2(A_2 + \Phi_2^2)(\Phi_2^2 - B_2) \quad (9)$$

Они имеют решения в эллиптических функциях. В оригинальной работе [2] в приведенных уравнениях справа в двух полиномах четвертой степени содержатся три неизвестных независимых константы. Здесь, как это было сделано ранее [3], введено вместо трех независимых пять взаимосвязанных констант  $a, A_1, A_2, B_1, B_2$  при сохранении степени полиномов. Выбирая различным образом знаки в круглых скобках, можно расширить круг эллиптических функций, из которых строится решение. В частности, в выражениях (8) и (9) знаки выбраны применительно к задаче о симметричных колебаниях. Пять указанных констант подчиняются двум соотношениям, которые далее раскрываются как дисперсионные уравнения. Они получаются просто повторной подстановкой выражений (8) и (9) в основное уравнение (6), что дает

$$A_1 B_1 = A_2 B_2 \quad (10)$$

$$\bar{a}^2(A_1 - B_1) - \bar{a}^2(A_2 - B_2) = 1 \quad (11)$$

Вид уравнений (8) и (9) в точности соответствует нормальной форме эллиптических интегралов, которые табулированы [4]. В результате можно сразу выписать в явном виде конкретные зависимости. С учетом граничных и начальных условий (2)–(4) получим прежде всего

$$\Phi_1 = \operatorname{cn}\left[\frac{t}{T}2mK_1\right], \quad \Phi_2 = \operatorname{cn}\left[\frac{x}{h}2nK_2\right] \quad (12)$$

$(n, m = 1, 2, 3, \dots).$

При этом использовали свойство функции эллиптического косинуса  $\operatorname{cn}[ ]$ , который обращается в нуль при значениях аргумента кратных величине  $2K$ , где  $K$  – эллиптический интеграл первого рода, являющийся известной функцией  $K(v)$  своего модуля  $v$  [4]. В уравнении (12) введены обозначения

$$K_1 = K(v_1), \quad K_2 = K(v_2) \quad (13)$$

$$v_1^2 = A_1/(A_1 + B_2), \quad v_2^2 = A_2/(A_2 + B_1)$$

Ясно, что имеет место дискретный пространственно-временной спектр колебаний. Далее будем

рассмотрена основная мода ( $m, n = 1$ ) с основными периодами  $2h, 2T$ . Более короткие периоды характерны для тех частных решений, которые возникают при энергетически более высоких уровнях возбуждения колебаний. Их анализ аналогичен излагаемому ниже. Наряду с этими частными решениями существуют и другие, соответствующие несимметричным односторонним колебаниям около одного из двух состояний равновесия. Однако они здесь не рассматриваются.

Итак, в окончательной форме решение для симметричных колебаний (основной моды) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\Phi(x, t)}{2} &= \\ &= \frac{(v_1 v_2)^{1/2}}{[(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)]^{1/4}} \operatorname{cn}\left(\frac{2t}{T}K_1\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2x}{h}K_2\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Эллиптические интегралы  $K_1, K_2$  и их модули  $v_2, v_1$  определяют степень эллиптичности колебаний. Переход к круговым косинусам происходит, когда интегралы обращаются в  $\pi/2$ , а модули стремятся к нулю. Тогда в силу малости модулей правая часть формулы (14), а с ней и угол становятся малыми. Ясно, что модули  $v_1, v_2$  определяют и амплитуду нелинейных колебаний. Исходя из определения (3) экстремального углового отклонения  $\Phi_e$ , получим из уравнения (14), положив предварительно  $t = 0, x = 0$

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_e}{2} = a = \frac{(v_1 v_2)^{1/2}}{[(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)]^{1/4}}, \quad \Phi_e = \Phi(0, 0) \quad (15)$$

Здесь  $a$  – тангенс-амплитуда. Через четверть периода формула (14) дает  $\Phi(x, T/2) = 0$ , т.е. система действительно проходит через состояние неустойчивого равновесия.

В линейном пределе полученное решение переходит в гармоническое, которое описывает стоячую волну. Последнюю можно представить как суперпозицию двух бегущих в противоположных направлениях волн с нулевым потоком энергии. Нелинейное решение не является строго говоря стоячей волной. Встречные потоки энергии компенсируются только в узловых точках  $x = +h/2, -h/2$ . Групповая скорость отлична от нуля.

Обратимся к анализу дисперсионных соотношений, которые в общем виде записаны в уравнениях (10) и (11). Раскрывая первое из них, получим выражение для фазовой скорости  $C$  как функции параметров  $v_1, v_2$  и свойств нематика

$$\frac{C^2}{C_0^2} = \frac{v_2 \sqrt{1 - v_2^2} K_2^2}{v_1 \sqrt{1 - v_1^2} K_1^2}, \quad C = \frac{h}{T}, \quad C_0 = \sqrt{k/J} \quad (16)$$

Здесь  $C_0$  – значение фазовой скорости в отсутствие магнитного поля. Второе соотношение (11) принимает вид

$$\frac{h_H^2(1 - 2v_2^2)K_2^2}{h^2} - \frac{T_H^2(1 - 2v_1^2)K_1^2}{T^2} = 1 \quad (17)$$

Величины  $h_H, T_H$  – характерные пространственно-временные масштабы:

$$h_H^2 = \frac{4k}{\chi H^2}, \quad T_H^2 = \frac{4J}{\chi H^2} \quad (18)$$

Три уравнения (15)–(17) содержат пять переменных величин  $h, T, a, v_1, v_2$ . Исключая из них два последних, получим одно уравнение, которое для каждой амплитуды  $a$  представляет собой связь между безразмерной частотой колебаний  $\omega$  и волновым числом  $m^{-1}$ . Последние определяются так:

$$\omega = \frac{T_H}{T}, \quad m^{-1} = \frac{h_H}{h} = \frac{2\mu_H}{hH}, \quad \mu_H = \sqrt{\frac{k}{\chi}} \quad (19)$$

Функция  $\omega = \omega(m, a)$  задает семейство ветвей симметричных колебаний, где тангенс-амплитуда  $a$  играет роль параметра. Заметим, что характерные масштабы  $T_H$  и  $h_H$  зависят, согласно выражению (17), от свойств среды, и от напряженности магнитного поля. Они растут с убыванием напряженности магнитного поля. Обратное волновое число  $m$  можно рассматривать в качестве граничного магнитного потенциала  $\mu = hH$ , отнесенного к характерному значению  $\mu_H$ . Статическому порогу устойчивости однородной ориентации  $\Phi = 0$  соответствует  $m = \pi/2$ .

В аналитическом виде получить функцию  $\omega(m, a)$  не удается. В следующих разделах это будет сделано для двух предельных случаев. В общем виде семейство ветвей колебаний при разных значениях амплитуды построено по результатам машин-

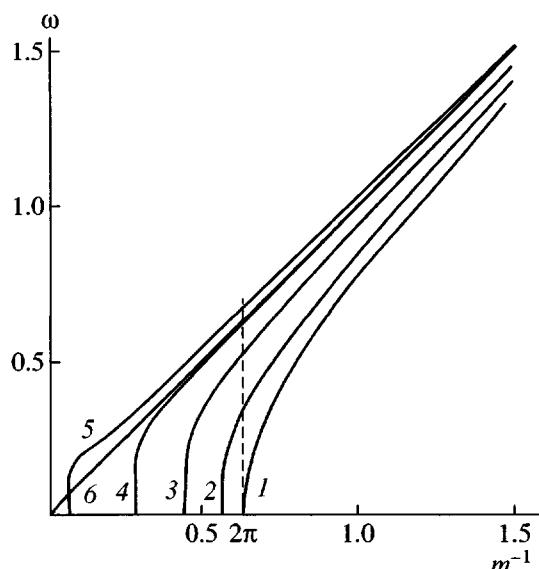


Рис. 2. Ветви симметричных колебаний кручения при разных значениях амплитуды  $a$ . Крайняя правая ветвь – вырожденная ветвь в нулевом магнитном поле. Точка выхода ветви 1 из оси абсцисс соответствует порогу Фредерикса. Началу координат отвечают бесконечные значения произведения  $hH$ . Пояснения в тексте.

ного счета и показано на рис. 2. Они напоминают гиперболы, выходящие из соответствующих точек оси абсцисс и стремящихся к единой асимптоте  $\omega = C_0 m^{-1}$ . Последняя является вырожденной ветвью колебаний, но в нулевом магнитном поле. Все семейство выходит из точек, расположенных на оси абсцисс в ограниченной области – от начала координат  $m^{-1} = 0$  ( $H^{-1} = 0$ ) до  $m^{-1} = m_0^{-1} = 2/\pi$  ( $H = H_\Phi$ ). Этим точкам соответствуют и “колебания” с нулевыми частотами, т.е. статическая деформация. Ограниченностю диапазона справа на оси абсцисс отвечает известному факту – деформация возникает лишь в больших полях, превышающих статический порог Фредерикса. Из правого конца диапазона (предельной точки) выходит ветвь малых колебаний (1), а левее нее – все другие ветви (отвечающие конечным амплитудам) лежат выше и левее нее и не спускаются к оси абсцисс. Это значит, что в полях ниже статического порога Фредерикса возможны лишь динамические деформации. На рис. 2 показаны также ветви 2, 3 и 4. Им соответствуют значения угловой амплитуды  $\Phi_e = 26^\circ, 45^\circ$  и  $67.5^\circ$ , а также тангенс-амплитуды  $a = 0.5, 1.0$  и  $2.4$ . Ветвям 5 и 6 отвечают угловые амплитуды более  $90^\circ$ . Их начальные участки лежат выше асимптоты, т.е. фа-

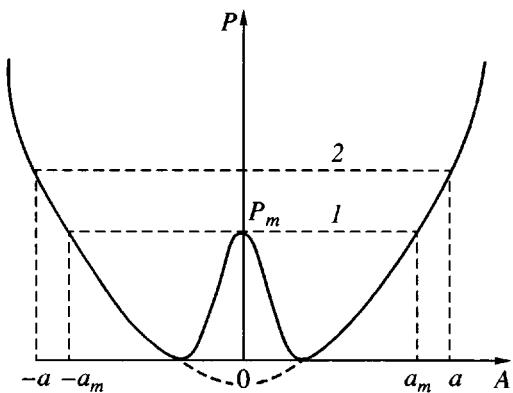


Рис. 3. Зависимость средней (по толщине слоя) упругой энергии закрученной структуры от величины закрутки в центре слоя. Уровню 2 соответствует начальная закрутка, уровню 1 – критическое состояние, бифуркационная граница.

зовые скорости превышают  $C_0$ . Данный эффект связан с тем, что при таких больших закрутках упругость структуры возрастает, превышая эффект ее снижения дестабилизирующим полем.

Точка  $m^{-1} = 2/\pi$  на оси абсцисс, соответствующая порогу Фредерикса, делит всю ось на две части. Правее вертикальной штриховой линии лежит область низких полей (допороговых), при которых статические деформации вообще невозможны. Колебания же возникают, но при повышенных частотах – границей является ветвь нулевых колебаний ( $a = 0$ ). Левее находится область больших магнитных полей и низких частот колебаний – ветви опускаются до нулевого уровня, которому соответствуют малые значения фазовых скоростей  $C$ . Дело в том, что большие дестабилизирующие поля снижают эффективную упругость структуры, понижая и скорость волн.

Низкочастотным участкам ветвей отвечают так называемые мягкие моды, с которыми связан ряд аномальных эффектов, не имеющих аналога в области малых колебаний. Им, как уже было показано, соответствуют высокочастотные участки этих же ветвей. Мягким модам, которыми мы в данной работе и интересуемся, отвечает немонотонный, двухуровневый упругий потенциал (рис. 3). В области малых полей (правее штриховой линии на рис. 2 или ниже порога Фредерикса) этот потенциал вырождается в потенциал с одной ямой (см. штриховую кривую линию на рис. 3).

Обратим внимание и на то, что симметричные колебания возможны лишь при амплитудах  $a > a_m$ .

При  $a = a_m$  они переходят в несимметричные. Здесь предельное значение  $a_m$  соответствует уровню потенциального барьера, как показано на рис. 3. Колебаниям с амплитудой  $a = a_m$  соответствуют на рис. 2 точки (на оси абсцисс для каждого поля  $H$  и толщины слоя  $h$ ), отвечающие началу всех ветвей от нулевого уровня частоты. Теперь ясно, что данные точки на оси абсцисс не соответствуют статической деформации, т.е. состоянию устойчивого равновесия. Это точки неустойчивого равновесия. Их бифуркационный характер становится очевидным, если на рис. 2 нанести и ветви несимметричных колебаний (не показаны). Тогда из каждой точки на оси абсцисс будет исходить по две ветви, но в разные стороны. Характер движения при  $a = a_m$ , т.е. в точке бифуркации будет рассмотрен.

### ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Соотношения (13)–(19) полностью задают главную моду симметричных (двусторонних) колебаний. Чтобы легче разобраться в их физическом смысле, полезно рассмотреть частные случаи. Первый из них, реализующийся при  $v_1, v_2 \rightarrow 0$ , соответствует малоугловому приближению:

$$\sin 2\Phi \approx 2\Phi \quad (20)$$

Это приводит к линеаризованной версии уравнения (6), решение которого принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} \approx \frac{\Phi}{2} = a \cos \frac{\pi x}{h} \cos \frac{\pi t}{T}, \quad a = v_1 v_2 \quad (21)$$

$$C^2/C_0^2 \approx v_2/v_1 = 1 - \chi H^2 h^2 / \pi^2 k \quad (22)$$

Дисперсионное соотношение (17) сводится к следующему:

$$\chi H^2 = \frac{\pi^2}{h^2} k - \frac{\pi^2}{T^2} J \quad (23)$$

Обращаясь к формулам (19), можно видеть, что соотношение (23) устанавливает связь частоты  $\omega$  и волнового числа  $m^{-1}$ . На рис. 2 ей соответствует гипербола с индексом “1”. Ясно, что низкие частоты возникают в больших магнитных полях. Причина в том, что дестабилизирующее поле как бы “расслабляет” структуру нематика, делая

ее более податливой. Это видно из расстановки знаков в соотношении (23).

Полученное соотношение полезно сопоставить с выражением для порогового поля Фредерикса

$$\chi H_{\Phi}^2 = \frac{\pi^2}{h^2} k \quad (24)$$

Тогда соотношение (23) можно записать так:

$$\chi H^2 = \chi H_{\Phi}^2 - \frac{\pi^2 J}{T^2} \quad (25)$$

Из выражения (25) следует, что  $H < H_{\Phi}$ , т.е. малоугловые колебания возможны лишь в малых допорговых полях.

Очевидно, динамическое слагаемое в соотношении (17) обязано своим появлением ориентационной инерции. Это слагаемое, однако, существенно (по причине малости величины  $J$ ) лишь при высоких частотах и достигает максимума в нулевом магнитном поле, когда

$$\max\left(\frac{\pi^2 J}{T^2}\right) = \frac{\pi^2 k}{h^2} \longrightarrow \max\left(\frac{\pi^2}{T^2}\right) = \frac{\pi^2 k}{J h^2} \quad (26)$$

Обращают на себя внимание также соотношения (18), которые помогают выявить физический смысл параметров  $v_1$ ,  $v_2$ , если выразить их через амплитуду и напряженность магнитного поля следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{a C_0^2}{C^2} = \frac{a^2}{1 - H^2 H_{\Phi}^{-2}}, \\ v_2^2 &= \frac{a C^2}{C_0^2} = a^2 (1 - H^2 H_{\Phi}^{-2}) \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение в скобках характеризует очевидно удаленность (вниз) от порога Фредерикса. Интересно, что оба параметра одинаково зависят от амплитуды, но по-разному от напряженности магнитного поля. Из формул (27) следует, что  $v_1 > v_2$ .

### ПУЛЬСИРУЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Основной интерес представляет, однако, иное приближение по параметрам, а именно  $v_1 \rightarrow 1$ ,

$v_2 \rightarrow 0$ . Первое условие сводит эллиптический косинус к обратному гиперболическому косинусу, а второе – к круговому. В результате решение уравнения (6) примет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} \equiv a \cos \frac{\pi x}{h} \operatorname{ch}^{-1} \frac{K_1 t}{T} \quad (28)$$

$$a^2 \equiv \frac{v_2}{\sqrt{1 - v_1^2}} \quad (29)$$

Оно описывает нелинейные сильно эллиптические (по времени) и синусоидальные (по координате) колебания цепочки перевернутых маятников. Эллиптичность по времени выражается в том, что в середине полупериода движение весьма медленное, а на его концах довольно быстрое.

Пульсирующий характер колебаний приводит к эффективному усилию инерционных эффектов при низких частотах. Поэтому скорость распространения соответствующих волн мала. Действительно, из формул (16) в принятом приближении получаем

$$\frac{C^2}{C_0^2} \equiv \frac{\pi^2 a_m^2}{4 K_1^2}, \quad a_m = \min a, \quad v_1 \rightarrow 1 \quad (30)$$

Здесь эллиптический интеграл первого рода  $K_1$  имеет следующее асимптотическое представление:

$$K_1 \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - v_1^2}, \quad v_1 \rightarrow 1 \quad (31)$$

Поскольку  $K_1 \rightarrow \infty$  при  $v_1 \rightarrow 1$ , величина  $C \rightarrow 0$ , т.е. мода пульсирующих двусторонних колебаний является медленной (мягкой). Далее, раскрывая  $C$  и  $C_0$ , согласно их определения в формулах (16), получим из соотношения (30)

$$K_1^2 T^{-2} = \frac{\pi^2 k a_m^2}{4 J h^2} \quad (32)$$

Следовательно, частота пульсирующих колебаний может быть сколь угодно низкой даже при малых (но конечных) значениях момента инерции  $J$ . Интересно, что произведение, стоящее слева в соотношении (32), выражается лишь через фиксированные величины, фигурирующие справа. Это значит, что  $T K_1$  является инвариантом процесса

колебаний. Усиление роли инерционных сил особенно ясно видно из выражения (17), которое в принятом приближении принимает вид

$$\chi H^2 = \frac{\pi^2 k}{h^2} + \frac{4K_1^2}{T^2} J \quad (33)$$

Здесь в отличие от случая малых колебаний динамическое слагаемое содержит вместо множителя  $J$  комплекс  $JK^2$ , который играет роль эффективного момента инерции при пульсирующих колебаниях, значительно превосходящего действительный момент инерции. Поэтому и возникает эффект распространяющихся ориентационных волн.

Вторая особенность дисперсионного соотношения (33) по сравнению с линейным случаем состоит в изменении знака перед динамическим слагаемым. В результате изменяются условия возникновения колебаний – пульсирующие колебания возможны в полях, превышающих порог Фредерикса (25), т.е.

$$H^2 h^2 \geq H_\Phi^2 h^2 \quad (34)$$

$$H_\Phi^2 h^2 = \frac{\pi^2 k}{\chi} \quad (35)$$

Полезно выразить в дисперсионном соотношении (33) динамический член через предельную амплитуду с помощью формулы (32), что дает

$$\chi H^2 = \frac{\pi^2 k}{h^2} (1 + a_m^2) \rightarrow \frac{H^2}{H_\Phi^2} = 1 + a_m^2 \quad (36)$$

Очевидно, вклад инерционных эффектов задается величиной  $a_m^2$  по сравнению с единицей в круглых скобках или удаленностью от порога Фредерикса. Таким образом, пульсирующие ориентационные волны возникают при низких частотах, но в больших магнитных полях. Заметим, что соотношение (36) является по сути дела определением предельной амплитуды. При более низких амплитудах симметричные (двусторонние) колебания переходят в односторонние несимметричные, когда потенциальный барьер не преодолевается и движение сосредоточивается вблизи одного из двух устойчивых положений равновесия с закруткой в одну сторону.

Соотношение  $a = a_m$  определяет точку бифуркации нелинейных колебаний. В непосредствен-

ной близости от нее и установлены соотношения этого раздела. Они получены исходя из формального условия  $v_1 \rightarrow 1, v_2 \rightarrow 0$ . Теперь покажем, что эквивалентным неформальным условием является  $a \rightarrow a_m$ , т.е. приближение к точке бифуркации. Для этого нужны более общие соотношения, включающие и саму величину амплитуды  $a$ , которые получаются вообще говоря в результате энергетического анализа [5].

## ВОЗБУЖДЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Проблема возбуждения колебаний требует рассмотрения вынужденных колебаний, которые могут возникать в магнитном поле, зависящем от времени. Такие режимы используются в частности в оптоэлектронных приборах обработки информации. Однако в этом случае необходимо решать более общее уравнение колебаний. Ограничимся в этом разделе режимом ступенчатого переключения магнитного поля, позволяющим возбудить свободные симметричные колебания, не учитывая диссипации.

Одно из условий возбуждения колебаний состоит в том, чтобы в начальный момент времени создать достаточно большое начальное угловое отклонение  $\Phi_0$ , позволяющее превзойти бездиссипационный порог симметричных колебаний, именно

$$\operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2} \geq a_m, \quad a_m^2 = \frac{H^2}{H_\Phi^2} - 1 \quad (37)$$

Соответствующая начальная закрутка  $\Phi_0$  создается с помощью магнитного поля  $H_0$ , превышающего рабочее  $H$  с последующим переключением на последнее (рис. 4). Запаса упругой энергии в искаженной структуре достаточно, чтобы в этом более низком поле, но все же превосходящем пороговое, возникли колебания с преодолением неустойчивого состояния равновесия.

Связь между полем  $H_0$  и вызываемой им закруткой  $\Phi_0$  определяется при решении статической задачи. Соответствующее выражение выглядит так:

$$\frac{2}{\pi} K(v) = \frac{H_0^2}{H_\Phi^2}, \quad v = \sin \Phi_0 \quad (38)$$

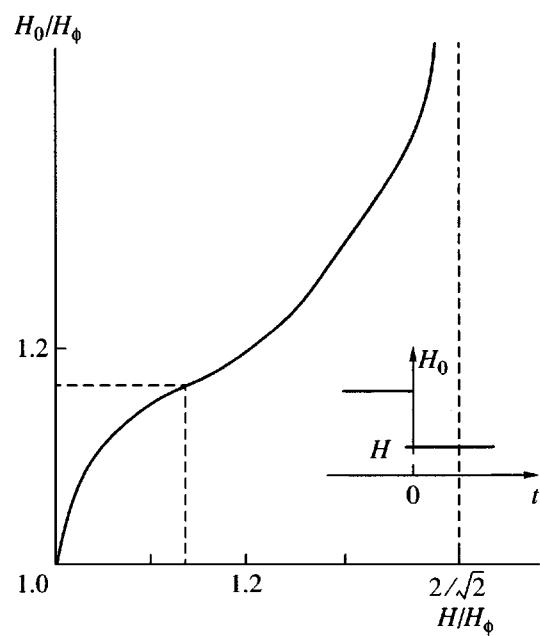
В результате имеем два соотношения (37), (38) для трех неизвестных –  $H$ ,  $H_0$  и  $\Phi_0$ . Исключая из них  $\Phi_0$ , получим одно условие, накладываемое на возбуждающее  $H_0$  и рабочее  $H$  поле. Эту связь не представляется возможным выразить в простой аналитической форме. Машинный счет дает зависимость, показанную на рис. 4. Область, лежащая выше кривой, соответствует неравенству (37) или условию возбуждения симметричных колебаний с помощью указанной процедуры ступенчатого включения магнитного поля, правда без учета диссипации. Последняя приведет к смещению границы вверх в область больших возбуждающих полей и, разумеется, к изменению формы границы. Действительно, в неравенстве вместо  $a_m$  должна появиться предельная амплитуда  $a_d$ , которая связана с магнитным полем  $H$  более сложным соотношением. Возвращаясь к рис. 4, обратим внимание на точку перегиба на кривой. Ее координаты  $H/H_\Phi = 1.11$  и  $H_0/H_\Phi = 1.18$  соответствуют начальной закрутке  $\Phi_0 = 45^\circ$ . Очевидно, превышение полей  $H$  и  $H_0$  над порогом  $H_\Phi$  не слишком велико и вполне достижимо в эксперименте. Однако дальнейшее повышение амплитуды колебаний требует намного большего возбуждающего поля, вплоть до бесконечности с приближением угла  $\Phi_0$  к значению  $90^\circ$ .

#### НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В ВОЛНЕ И ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ

Наряду с точным решением бездиссиационного уравнения (6) можно построить некоторые точные решения уравнения (5) с учетом вращательной вязкости. Приближенный подход развит в работах [6, 7]. Рассмотрим вначале частный случай стационарной волны, распространяющейся с фазовой скоростью  $v_0 = \sqrt{k}/J$  и фазой  $q = n(x - v_0 t)$ . Переходя к фазовой переменной, перепишем уравнение (5) в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$2n^2(Jv_0^2 - k)\Phi_{,qq} = \chi H^2 \sin 2\Phi - 2nv_0\gamma n\Phi_{,q} \quad (39)$$

Здесь  $n$  – волновое число, а запятая в индексах означает дифференцирование по фазовой переменной. Если фазовая скорость волны выбирается из приведенного выше условия, то круглая скобка слева обращается в нуль и поле углов под-



**Рис. 4.** Граница возбуждения симметричных колебаний, порождаемых предварительно включенным полем  $H_0$  с последующим переключением на уровень рабочего поля  $H$ . На вставке – схема переключения полей.

чиняется более простому уравнению первого порядка

$$2\gamma n v_0 \Phi_{,q} = \chi H^2 \sin 2\Phi \quad (40)$$

Оно интегрируется без труда. Получается солитоноподобное решение, которое описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях из “точки”  $q = 0$ . В положительном направлении угловое поле возрастает до  $\Phi = \pi/2$ , а в отрицательном – убывает до нуля. Если выбрать конкретную точку – центр слоя  $x = 0$ , то в ней наблюдается экспоненциальный рост тангенса половинного угла от предельного нулевого значения до устойчивого стационарного значения, отвечающего значению угла  $\Phi = \pi/2$ .

Рассмотренные выше случаи связаны фактически с возбуждением лишь свободных колебаний в слое фиксированной толщины. Определенный интерес представляют вынужденные колебания, возникающие в результате выключения магнитного поля не скачком, а непрерывным образом, хотя, возможно, и достаточно быстро. Это требует анализа уравнения, в котором учитыва-

ется наряду с диссипацией и зависимость от времени магнитного поля:

$$J\partial^2\Phi/\partial t^2 = k\partial^2\Phi/\partial x^2 + (1/2)\chi H^2(t) \sin 2\Phi - \gamma\partial\Phi/\partial t \quad (41)$$

Такие режимы используются, в частности, в оптоэлектронных приборах обработки информации.

В общем виде эта задача неразрешима, однако может быть найдено ее частное решение для случая магнитного поля, спадающего со временем как

$$H(t) = H_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = J/\gamma \quad (42)$$

К моменту времени  $t = 0$  поле спадает до уровня  $H_0$ . При этом вместо фиксированного слоя рассмотрим систему слоев одинаковой толщины, полагая, что их толщина одинакова, но они могут меняться во времени. Реально это система доменов, разделенных  $\pi$ -стенками.

Интересующие нас ориентационные колебания затухающие даются точным решением уравнения (41)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\Phi/2 &= a \operatorname{cn}(2\hat{t}K_1/T) \operatorname{sn}(2\hat{x}K_2/h), \\ a^4 &= v_2^2/(1 - v_2^2)(1 - v_1^2) \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь величины  $h$ ,  $T$  являются произвольными пространственно-временными масштабами системы в начальный момент времени  $t = 0$ . Кроме того,

$$\hat{t} = \frac{T}{2} - \tau \exp(-t/\tau), \quad \hat{x} = x \exp(-t/\tau) \quad (44)$$

Приведенные соотношения представляют собой фактически формулы перехода к новым переменным  $\hat{t}$  и  $\hat{x}$ . Отметим, что постоянное слагаемое в первом соотношении определяет произвольную фазу колебаний. В этих переменных уравнение (41), как показано в работе [6], переписывается в более простом виде

$$J\partial^2\Phi/\partial\hat{t}^2 = k\partial^2\Phi/\partial\hat{x}^2 + (1/2)\chi H_0^2 \sin 2\Phi \quad (45)$$

Оно совпадает с уравнением (6) без диссипативного слагаемого с постоянным коэффициентом при нелинейном члене (6). Отсюда (вначале в

приведенных переменных) находится решение в виде (43), совпадающее по форме с выражением (14), в связи с чем и дисперсионные уравнения (17), а также их графическое изображение на рис. 2 имеют тот же вид. Используя преобразования (44), можно вернуться к исходным переменным. Это и есть окончательное решение.

В справедливости такого решения можно убедиться и непосредственной подстановкой в уравнение (41). Метод решения развит в работе [8]. Заметим, что это едва ли ни единственное точное решение обобщенного уравнения типа синус-Гордона. Оно включает в себя (через характерное время релаксации  $\tau$ ) коэффициент диссипации (вращательную вязкость  $\gamma$ ) без какого-либо условия малости. Замечательно, что, несмотря на небольшую диссипацию, существуют режимы колебаний, когда их амплитуды сохраняются. Это прямо усматривается из рис. 2, где каждая кривая отвечает постоянной амплитуде  $a$ . Здесь нет противоречия с законом сохранения энергии. Просто в истинных масштабах эти нелинейные колебания представляют собой модулированные (по фазе, частоте и пространственной частоте), которые деградируют со временем – пространственные и временные частоты возрастают. Действительно, решение (43) представляет собой стоячую волну – исчезающий бризер. Оно эволюционирует со временем, что легко видеть, если выразить в явной форме в (43) зависимость внешнего магнитного поля от времени согласно преобразованиям (44). В пределе больших времен под знаком первого косинуса исчезает зависимость от времени – решение (43) переходит в статическое. Но и под знаком второго косинуса исчезает зависимость от пространственной координаты – в нулевом магнитном поле нет угловых градиентов, если движение отсутствует.

Теперь уточним детали. Они выявляются в двух предельных случаях. В начальный момент времени  $t \rightarrow 0$ , когда магнитное поле опускается до уровня  $H_0$ , имеем, согласно формулам (44),  $\hat{t} \rightarrow 0$ ,  $\hat{x} \rightarrow x$ . В результате решение (43) в этом пределе примет вид

$$\operatorname{tg}\Phi/2 = a \operatorname{cn}0 \operatorname{sn}(2xK_2/h) = a \operatorname{sn}(2xK_2/h) \quad (46)$$

при  $t = 0$

Здесь учтено соотношение для эллиптического косинуса  $\operatorname{cn}0 = 1$ . Выражение (46), очевидно,

дает просто начальное угловое распределение. Во все последующие моменты времени ( $t \rightarrow \infty$ ) первый эллиптический косинус в выражении (43) обращается в нуль, лишь в бесконечном пределе ( $t \rightarrow \infty$ ) – в силу формул (44) имеем  $\hat{t} \rightarrow t$ ,  $\hat{x} \rightarrow 0$ , поэтому предельное решение вырождается в константу, отвечающую начальному распределению. Действительно

$$\operatorname{tg}\Phi/2 = a \operatorname{cn}(2\tau K_1/T) \operatorname{cn}0 = a \operatorname{cn}(2\tau K_1/T) \quad (47)$$

при  $t \rightarrow \infty$

Выражение в скобках под знаком косинуса – это произвольная фаза колебаний, величину которой можно выбирать. Соотношение (47) означает, что в результате эволюции возникло некоторое однородное угловое поле. Однако оно неравновесное, поскольку в нулевом магнитном поле, которое является результатом релаксации, равновесие возможно лишь при нулевом поле углов. В связи с этим должны происходить угловые колебания около положения равновесия с дальнейшим затуханием. Здесь принято во внимание соотношение  $\operatorname{cn}0 = 1$ . Так как фаза колебаний является произвольной величиной, выберем ее из условия так называемого релаксационного резонанса  $T = 2\tau$ . Тогда выражение (47) примет вид

$$\operatorname{tg}\Phi/2 = a \operatorname{cn}K_1 = 0, \quad T = 2\tau, \quad t \rightarrow \infty \quad (48)$$

Нуль справа связан с условием, которому подчиняется функция эллиптического косинуса  $\operatorname{cn}K_1 = 0$ . Поэтому поле угловых поворотов обращается в нуль. Но такое состояние отвечает равновесной однородной структуре. Поскольку в данном пределе и магнитное поле обращается, согласно соотношению (42), в нуль, достигается устойчивая однородная ориентация.

В этом случае колебания во времени возможны лишь тогда, когда  $t \rightarrow 0$  со стороны отрицательных значений. Далее происходит эволюция в апериодическом режиме поскольку косинус обращается в нуль лишь в бесконечном временном пределе. Заметим, что для пульсирующих колебаний, как они определены в соответствующем разделе перед формулой (28), полезно учесть, что косинус эллиптический переходит в обратный косинус гиперболический. Тогда апериодический режим описывается контуром кривой солитона.

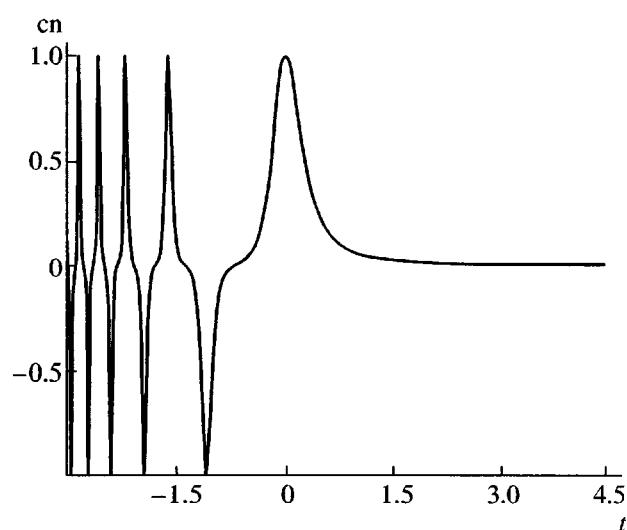


Рис. 5. Нелинейная релаксация модулированных колебаний со временем.

Хотя формально это связано с переходом по времени к бесконечности в силу экспоненциального характера спадания магнитного поля (42), практически же почти вся эволюция завершается за время релаксации  $\tau$ , которое оказывается чрезвычайно малым. Поскольку магнитное поле обращается в нуль, а однородное состояние по определению устойчиво, колебания прекращаются, исчерпывая весь запас упругой энергии первоначально деформированной структуры. Таким образом, точное решение (43) описывает эволюцию структуры с остановкой движения при нулевом значении угла. На рис. 3 штриховая кривая показывает тот минимум потенциала, который возникает после исчезновения магнитного поля и связанного с ним барьера. Релаксационный резонанс означает, что система оказывается в минимуме как раз в тот момент, когда он появляется. Отметим, что ориентационное поле убывает не по экспоненциальному закону в отличие от управляющего магнитного поля. Упомянутое условие релаксационного резонанса реализует в выражении (48) наивысшее переключение ориентации в слое нематического жидкого кристалла. На рис. 5 показан ход во времени первого эллиптического косинуса в выражении (43), обозначенного на графике символом "сп" при следующих значениях параметров  $v_1 = 0.9999$ ,  $\tau = 1$ . Очевидна независимость амплитуды от времени, нарастание "периода" пульсирующих колебаний и их

срыв в момент времени  $t = 0$  с переходом к апериодическому режиму.

Как уже было отмечено, точное решение (43) не является периодическим по времени. Однако периодичность по пространству сохраняется в процессе эволюции, но ее масштаб меняется со временем. Поэтому пространственная структура, описываемая выражением (43) (в отличие от формулы (14)) не вписывается в жесткое пространство плоскопараллельной ячейки. Она представляет собой регулярную (в пространстве) систему доменов, разделенных плоскими дефектами, а именно,  $\pi$ -стенками, в середине которых реализуются граничные условия (2). Отметим, что стенки имеют толщину много меньшую, чем толщина слоев в случае, когда модуль эллиптического косинуса близок к единице, т.е.  $v_1 \rightarrow 1$ . В таком случае косинус эллиптический вырождается в обратный гиперболический.

Решение (43) можно рассматривать как модулированную стоячую волну, которая эволюционирует, наращивая со временем длину волны – расстояние между нулями второго косинуса в выражении (43). Легко показать, что эти полуволны имеют одинаковую длину в каждый момент времени независимо от номера промежутка. Однако со временем их длина экспоненциально возрастает. В начальный момент времени она равна просто  $h$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Колебательные переходы Фредерикса рассмотрены впервые в работе [5]. Они не изучались в специальных экспериментах. Однако не исключено, что их наблюдали как “паразитные” колебания при переключении внешних полей в электрооптических ячейках. Обсуждение похожих проблем можно найти в монографии [9]. Однако прямые заключения сделать затруднительно, поскольку рассматривается не кручение, а твист-деформация, содержащая изгибную компоненту, связанные с ней гидродинамические потоки и предварительную небольшую закрутку. Между тем прямые эксперименты представляются вполне выполнимыми.

Подводя итоги, отметим также следующее. Нелинейные инерционные колебания кручения нематической структуры имеют специфическую

мягкую низкочастотную моду – пульсирующие симметричные колебания с переходом через потенциальный барьер – положение неустойчивого равновесия. Эта мода отличается сильно выраженной эллиптичностью колебаний во времени, когда движение на концах полупериода оказывается сильно ускоренным, зависимость угла отклонения от времени описывается солитоноподобной функцией. Мягкая мода возникает в магнитных полях, превышающих порог Фредерикса, и амплитудах, близких к нижнему пределу (точке бифуркации), за которым происходит смена характера движения. При этом симметричные (двухсторонние) колебания сменяются несимметричными, когда движение сосредоточено около дна одной из потенциальных ям, положения устойчивого равновесия.

Колебания вблизи порога бифуркации отличаются не только усилением инерционных эффектов, но и снижением диссипации по причине замедления движения – вплоть до нуля, если амплитуда оказывается равной критическому значению  $a_d$ , соответствующему точке бифуркации.

Точное решение построено также и для магнитного поля, спадающего со временем по экспоненте. Обнаружен режим колебаний с постоянной амплитудой (несмотря на немалую диссипацию) и убывающей частотой. Колебания прекращаются, и система переходит в апериодический режим остановки движения при нулевом угловом отклонении, если выполняется условие “релаксационного резонанса”.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00052).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35. № 5. С. 897.
2. Лэм Д.Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
3. Аэро Э.Л. // Кристаллография. 1995. Т. 40. № 5. С. 889.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977
5. Аэро Э.Л. // Оптич. журн. 1999. Т. 66. № 1. С. 18.

6. Аэро Э.Л. // Теорет. и мат. физика. 1997. Т. 111. № 1. С. 132.
7. Аэро Э.Л., Вакуленко С.А. // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61. № 3. С. 479.
8. Аэро Э.Л. // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66. № 1. С. 18.
9. Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. С. 146.

## Nonlinear Dynamics and Kinetics of Freedericksz Transitions in Nematic Liquid Crystals

**E. L. Aero**

*Institute of Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,  
Bol'shoi pr. 61, St. Petersburg, 199178 Russia*

**Abstract**—Strongly nonlinear orientational vibrations of a nematic liquid crystal in a destabilizing magnetic field are considered. Freedericksz transitions between the left- and right-twisted structural states are analyzed. Dispersion equations relating the average oscillation frequencies to the strength of the constant magnetic field, layer thickness, and material constants are derived with and without allowance for dissipation. Pulsating oscillation regimes with constant amplitude (but decreasing frequency) in the presence of strong dissipation (due to rotational viscosity) are revealed; they are driven by a magnetic field that rapidly (exponentially) decreases over time.