

УДК 541.64:539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ<sup>1</sup>

© 2004 г. А. В. Черепанов

Институт механики сплошных сред  
Уральского отделения Российской академии наук  
614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1

Поступила в редакцию 01.04.2003 г.

Принята в печать 06.04.2004 г.

Рассмотрена задача об изменении размеров вакуоли при циклическом нагружении в насыщенном газом эластомерном материале. Исследовано влияние скорости нагружения на величину раскрытия вакуоли и разогрев материала вследствие диссипативных потерь. Для описания упругих свойств полимерной сетки использован потенциал, учитывающий конечность длины полимерных цепей.

### ВВЕДЕНИЕ

Эластомерные материалы могут впитывать большое количество газа, как на стадии изготовления, так и в процессе эксплуатации готового изделия. Растворенный газ существенно влияет на механические свойства конечного продукта. Для придания эластомерным материалам нужных механических свойств их смешивают с жестким наполнителем. В процессе эксплуатации матрица может отходить от включения, в результате чего в образовавшуюся вакуоль начнет выделяться растворенный в эластомере газ. В случае циклического нагружения газ будет то проникать в вакуоль, то выходить из нее. Эти процессы сопровождаются разогревом материала в окрестности микродефекта из-за внутреннего трения между эластомером и растворенным в нем газом. При многоцикловом нагружении с большой скоростью (например, в автомобильной шине) такие эффекты могут играть существенную роль при эксплуатации изделия. Цель настоящей работы – анализ описанных явлений в строгой термодинамической постановке.

### ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССОВ

#### В НЕОДНОРОДНО НАГРУЖЕННОЙ СМЕСИ

Для описания деформационных процессов в неоднородно нагруженной смеси используем теорию смеси Грина–Надхи [1, 2]. Описание будем осуществлять в отсчетной конфигурации. Полагаем, что температура смеси во всех ее точках постоянна (изотермический процесс). Как было показано в работах [3–6], все процессы описываются уравнением равновесия среды, движения растворенной компоненты смеси, неразрывности и механической несжимаемости.

Используем для выполнения расчетов процессы, протекающие в смеси эластомер–растворенный газ, объемную плотность свободной энергии, задаваемую выражением [7, 8]

$$w = w_e + c_R \theta \frac{(1 - \Phi_*)\Phi}{(1 - \Phi)V_\Phi} (\ln \Phi + \chi(1 - \Phi) + c_\mu) + \text{const} \quad (1)$$

Здесь  $\chi$  – параметр взаимодействия компонентов смеси. Его связь с концентрацией задается в виде

$$\chi = \chi_1 \Phi + \chi_2,$$

$w_e$  – упругий потенциал, записанный так:

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект 01-04), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта р2002урал\_a 02-01-96404).

E-mail: svistkov@icmm.ru (Черепанов Андрей Валерьевич).

$$w_e = (1 - \varphi_*) \sum_{i=1}^3 \left( b_1 \left( -\frac{\zeta_i^3}{3} + \zeta_i^2 \zeta_i - \ln(1 - \zeta_i) \right) + \frac{b_2}{2\lambda_{\max}} (\ln(\zeta_i))^2 \right), \quad (2)$$

где

$$\zeta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}} \left( \frac{1 - \Phi_0}{1 - \varphi} \right)^{1/3},$$

$\varphi$  – объемная доля растворенной компоненты смеси (в данном случае растворенного газа) в текущий момент времени;  $\Phi_0$  – объемная доля растворенной компоненты смеси в момент формирования полимерной сетки;  $\varphi_*$  – объемная доля растворенной компоненты в момент нанесения координатной сетки;  $\lambda_i$  – кратности удлинений материала;  $\theta$  – температура;  $c_1, b_1, b_2, \chi_1, \chi_2, c_\mu, v_\Phi$  – константы среды;  $c_R$  – универсальная газовая постоянная.

С помощью выражения для плотности свободной энергии можно вычислить химический потенциал растворенной компоненты смеси

$$\mu = \partial w / \partial n_1 \quad (3)$$

Для газа запишем объемную плотность свободной энергии следующим образом:

$$w_g = -c_R \theta n_1 \ln \left( \frac{\lambda_v}{n_1} \right) + n_1 c_g, \quad c_g = c_g(\theta) \quad (4)$$

Здесь  $c_g$  – функция температуры,  $\lambda_v = V/V_0$  – относительное изменение объема газа ( $V, V_0$  – объем газа в текущий и начальный моменты времени),  $n_1$  – мольная плотность идеального газа в отсчетной конфигурации (количество молей газа в единице объема деленное на параметр  $\lambda_v$ ).

Нетрудно убедиться, что выражение для свободной энергии (4) приводит к уравнению состояния идеального газа. Для механически несжимаемой смеси с плотностью свободной энергии (1) получается зависимость Флори–Хаггинса для химического потенциала растворенного вещества [9, 10]. Изменение упругого модуля при изменении концентрации растворенного вещества происходит в соответствии с установленными для эластомеров закономерностями [11].

## ФОРМУЛИРОВКА НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Опишем процессы, происходящие в окрестности включения в эластомерном материале под действием циклической нагрузки приложенной на бесконечности. Полагаем, что мы существует единичное включение в бесконечной упругой среде, содержащей растворенную газовую компоненту.

В полной постановке следует решать трехмерную задачу, но считаем, что это приведет только к количественным изменениям. Качественные эффекты можно исследовать в упрощенной постановке.

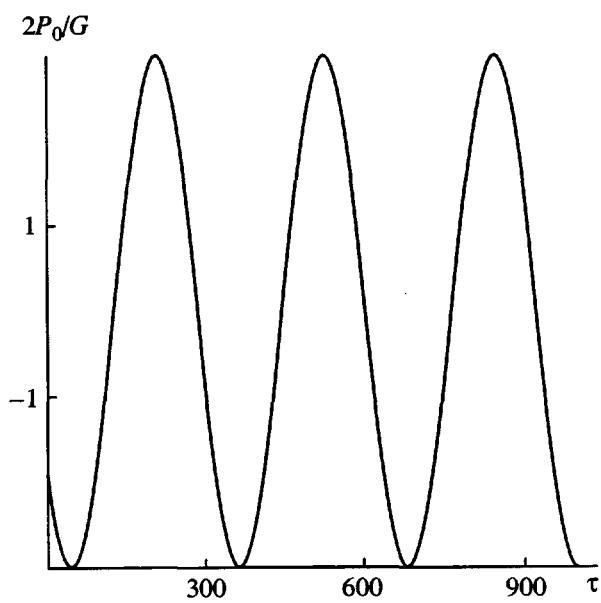
В начальный момент включение жестко сцеплено (“прилипло”) к матрице. Материал недеформирован (все его  $\lambda_i$  равны единице). Растворенный газ равномерно распределен по объему эластомера. На бесконечности начинаем прикладывать нагрузку по гармоническому закону. Требуется определить поведение материала после отслоения матрицы от включения. Соответствующий момент времени будем считать начальным.

Поместим начало координат в центр жесткого включения и будем искать решение задачи в сферических координатах. Все величины, определяющие состояние среды (деформации эластомера, концентрация растворенного газа и т.д.) зависят только от расстояния рассматриваемой точки среды до начала координат. Задача является одномерной. Кратности удлинений эластомера  $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\alpha$  связаны с перемещениями его точек  $u$ , вдоль оси  $r$  формулами

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1 + \frac{u}{r},$$

где  $u$  – радиальное перемещение.

В работе [3] выписаны общие уравнения термодинамики смеси деформируемого и жидкого компонента, позволяющие моделировать массообменные процессы для растворенного газа. В статье [4] эти уравнения переписаны для нашей конкретной задачи. В безразмерном виде определяющие уравнения и граничные условия были записаны в работе [6]. В результате для решения



**Рис. 1.** Схема приложения внешней нагрузки.  $P_0$  – радиальные напряжения на бесконечности с обратным знаком.

рассматриваемой задачи необходимо знать четыре безразмерных константы  $k_1, k_2, \chi_1, \chi_2$ :

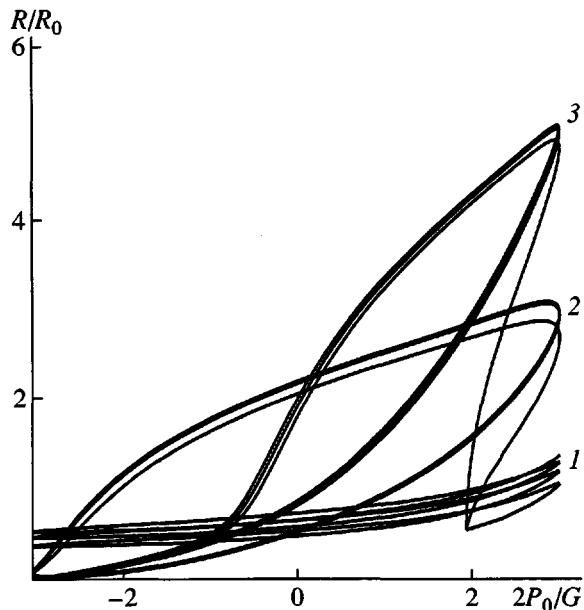
$$k_1 = \frac{c_R \theta}{c_1 v_\phi}, \quad k_2 = \frac{c_\mu - c_s}{c_1 v_\phi}$$

Они определены из эксперимента по набуханию ПДМС в углекислом газе и имеют следующие значения:  $k_1 = 268, k_2 = 3510, \chi_1 = -1.35, \chi_2 = -0.88$ .

### КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Будем считать, что при критическом нагружении происходит отслоение матрицы от включения. Эта нагрузка должна находиться при решении задачи адгезионной прочности матрицы-включения. В нашем расчете критическая нагрузка выбиралась произвольно. После отслоения, размер вакуоли мгновенно вырастает до конечной величины под действием напряженно-деформированного состояния в окрестности включения. В начальный момент времени в вакуоли нет газа. Начинаются активные массообменные процессы, газ заполняет вакуоль.

Если бы на бесконечности не прикладывалась нагрузка, отслоение наполнилось бы газом до выравнивания химических потенциалов. Однако параллельно с диффузией происходит рост отслое-



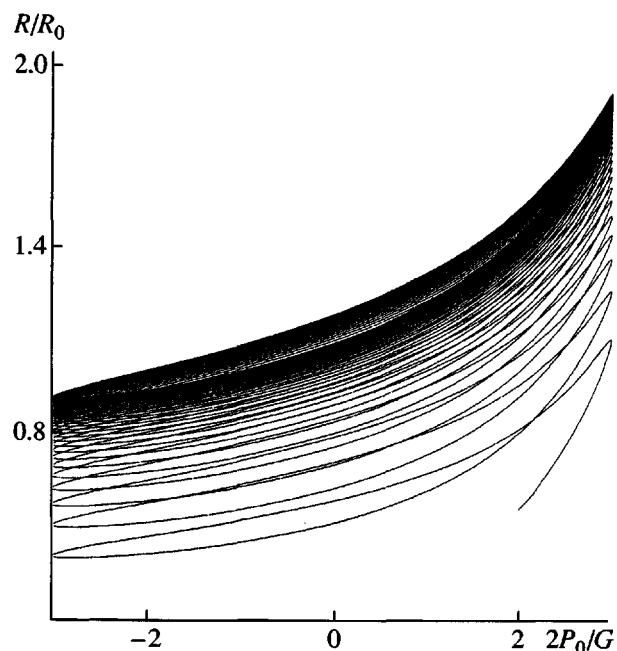
**Рис. 2.** Зависимость относительного изменения размеров вакуоли от величины внешней нагрузки. Период внешней нагрузки  $\tau = 3$  (1), 300 (2) и 3000 (3).

ния из-за приложения нагрузки, вакуоль как бы растягивается. Это мешает выравниванию химических потенциалов. Даже после смены направления нагружения (с растяжения на сжатия) какое-то время продолжается выход газа внутрь вакуоли. Получается, что поведение материала в окрестности включения зависит от величины внешней нагрузки и от диффузии газа в вакуоль, которая в свою очередь зависит от скорости приложения внешней нагрузки. Схема приложения нагрузки показана на рис. 1.

На рис. 2 приведена зависимость изменения размеров вакуоли от величины внешней нагрузки. Расчет выполнен для трех разных скоростей нагружения. При каждом эксперименте сделано три цикла нагрузки. Вместо реального времени используется безразмерное время  $\tau$

$$\tau = \frac{Gt}{2\eta R_0^2},$$

где  $G$  – начальный модуль сдвига,  $R_0$  – радиус включения,  $\eta$  – коэффициент сопротивления относительному движению компонентов среды (использование его в определяющих уравнениях поясняется в работе [4]). Хорошо видно, что когда безразмерное время одного цикла  $\tau = 3$ , за три цикла не происходит выход на установив-

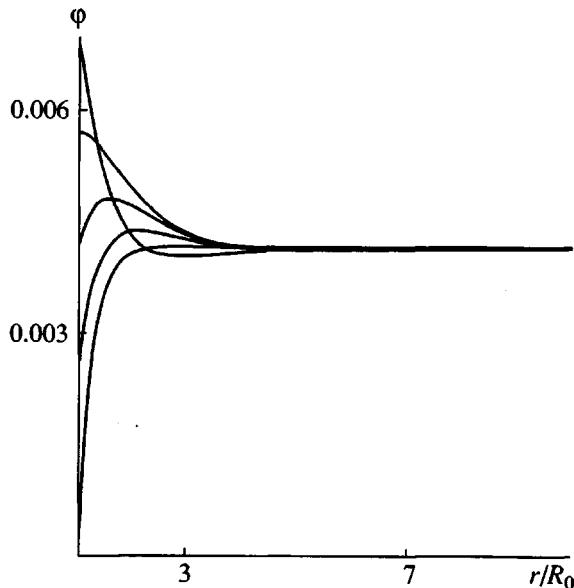


**Рис. 3.** Зависимость относительного изменения размеров вакуоли от величины внешней нагрузки. Период внешней нагрузки  $\tau = 3$ . Выполнено сорок циклов.

шийся режим. В каждом цикле вакуоль продолжает расти, при этом ширина гистерезисной петли небольшая.

Для следующего расчета значительно увеличим время одного цикла,  $\tau = 300$ . Хорошо видно, что уже на втором цикле достигается установившейся режим, при этом гистерезисная петля наибольшая. Площадь гистерезисной петли есть не что иное, как энергия перешедшая в тепло. Решаем изотермическую задачу, так как считаем, что на каждом цикле тепло успевает отводится во внешнюю среду. Это упрощение, по нашему мнению, имеет право на существование, потому что для нашей смеси коэффициент диффузии на два порядка больше, чем коэффициент теплопроводности; иными словами, теплообмен идет намного быстрее диффузионных процессов. Если решать задачу в полной постановке, то надо учитывать, что в реальном материале происходит разогрев и необходимо решать связанную задачу тепло-массообмена. Это сильно усложнит решение, но полагаем, что качественные эффекты можно увидеть и в изотермической постановке.

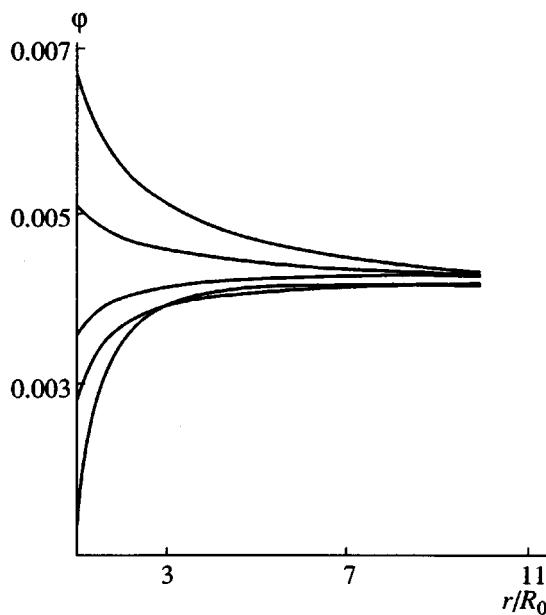
Третий расчет проведен для  $\tau = 3000$ . Здесь почти сразу попадаем на установившийся режим, при этом диссипативные потери уменьшились по



**Рис. 4.** Распределение объемной доли газа  $\phi$ . Период внешней нагрузки  $\tau = 3$ .

сравнению с предыдущим расчетом. Хорошо виден участок при малых размерах вакуоли, когда кривая разгрузки совпадает с кривой нагрузки. Это происходит потому, что диффузионные процессы успевают за скорость нагрузки, в результате на каждом шаге имеет место равновесный процесс. Когда размеры отслоения возрастают, диффузия уже не может успеть за увеличением размеров вакуоли, в результате появляется гистерезис и материал нагревается. При высокой скорости нагружения установившийся режим неведен. Для того, чтобы понять, что произойдет с материалом при большом количестве циклов, просчитали для высокой скорости нагружения (время одного цикла  $\tau = 3$ ) сорок циклов (рис. 3). Видно, что примерно на двадцатый цикл мы попадаем на установившийся режим, гистерезисная петля сохраняется. Нужно отметить, что, хотя диссипация на каждом цикле и невелика, однако скорость нагружения высокая, поэтому выделение тепла при таком виде нагружения может быть очень существенным.

На рис. 4 изображены диффузионные профили при  $\tau = 3$ . Хорошо видно, что содержание в окрестности включения отклоняется от равновесного в несколько раз, однако эти отклонения носят локальный характер и на удалении от включения на 4–5 радиусов практически не за-



**Рис. 5.** Распределение объемной доли газа  $\phi$ .  
Период внешней нагрузки  $\tau = 300$ .

метны. Другие результаты получим, если такой расчет провести для времени  $\tau = 300$  (рис. 5). Хотя отклонения от равновесия в окрестности включения такие же, как и в предыдущем расчете, влияние включения видно на расстоянии даже 10 радиусов.

В определенных условиях при циклической нагрузке наполненные эластомеры могут сильно нагреваться. Но при этом существуют режимы, при которых такое нагревание наибольшее. Проведенные расчеты показали, что массообменные процессы могут быть одной из причин вязкоупругого поведения и диссипативных потерь эласто-

меров. Результаты хорошо согласуются с известными из экспериментов особенностями поведения эластомеров. Можно найти такую скорость нагружения, при которой диссипация на одном цикле будет наибольшей. При изменении этой скорости в ту или иную сторону диссипативные потери одного цикла будут уменьшаться.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Truesdell C., Toupin R.F. // Encyclopedia of Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1960. V. III/I.
2. Green A.E., Steel T.R. // Int. J. Eng Sci. 1966. V. 4. № 4. P. 483.
3. Svistkov A.L. // Int. J. Eng Sci. 2001. V. 39. P. 1509.
4. Свистков А.Л., Черепанов А.В. // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2. № 3. С. 97.
5. Черепанов А.В. // Тез. докл. 8 Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001. С. 594.
6. Черепанов А.В., Свистков А.Л. // Тр. 12 Симп. "Проблемы шин и резинокордных композитов". М., 2001. Т. 2. С. 197.
7. Свистков А.Л., Свисткова Л.А. // Высокомолек. соед. А. 1998. Т. 40. № 5. С. 835.
8. Свистков А.Л. // Высокомолек. соед. А. 1998. Т. 40. № 5. С. 841.
9. Flory P.J. // J. Chem. Phys. 1941. V. 9. № 8. P. 660.
10. Huggins M.L. Physical Chemistry of Polymers. New York: Interscience, 1958.
11. Treloar L.R.G. // Rep. Prog. Phys. 1973. V. 36. № 7. P. 755.

## Deformation in the Vicinity of a Rigid Inclusion under the Conditions of Cyclic Loading

A. V. Cherepanov

Institute of Continuum Mechanics, Ural Division, Russian Academy of Sciences,  
ul. Akademika Koroleva 1, Perm, 614013 Russia

**Abstract**—The problem of change in vacuole dimensions under cyclic loading in a gas-saturated elastomeric material is considered. The effect of the loading rate on the opening of the vacuole and on the heating of the material due to dissipative losses is analyzed. To describe the elastic properties of a polymer network, a potential considering the finite length of polymer chains is used.