ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ, Серия А, 2002, том 44, № 6, с. 1023–1028

УДК 541.64:532.135

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2002 г. А. А. Адамов

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук
614013 Пермь, ул. Ак. Королева, 1

Поступила в редакцию 16.07.2001 г.
Принята в печать 19.12.2001 г.

Рассмотрена численная методика идентификации функций влияния в наследственной теории вязкоупругости с линейными интегральными операторами. Для идентификации использованы экспериментальные данные с произвольной измеренной квазистатической историей процесса деформирования. Рассматривается множество реализаций функции влияния, удовлетворительно аппроксимирующих экспериментальные данные. Предложен способ статистической обработки этих реализаций, позволяющий найти усредненную функцию, оценить ее рассеяние и границы временного интервала достоверной идентификации.

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные материалы обладают ярко выраженными релаксационными свойствами [1, 2]. Для описания их механического поведения широко используется линейная теория наследственной вязкоупругости, которую можно рассматривать как обобщение теории упругости, полученное при замене упругих постоянных соответствующими интегральными операторами [3].

Проблему идентификации интегральных операторов вязкоупругой модели для конкретного материала путем планирования экспериментальных работ при различных видах напряженно-деформированного состояния стараются свести к последовательности частных задач. При этом связь экспериментально измеренных функций напряжения $f(t)$ и деформации $l(t)$ представляется с помощью линейного интегрального оператора μ^*, воздействующего на историю деформации образца материала $f(t) = \mu^* l(t)$. Часто используют обратное соотношение, которое можно записать в виде

$$l(t) = (\mu^*)^{-1} f(t) \equiv J^* f(t)$$

Обычно обе функции $l(t)$ и $f(t)$ полагают тождественно равными нулю на интервале времени $t \in (-\infty, 0)$. Тогда оператор μ^* выражается через три функции влияния в виде [4]

$$f(t) = \int_0^t R(t-\tau)dl(\tau) = \mu_0\left[l(t) - \int_0^t G(t-\tau)l(\tau)d\tau\right] = \int_0^t\left\{\mu_\infty + \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln s)\exp[-(t-\tau)/s]d(\ln s)\right\}dl(\tau), \quad (1)$$

где $R(t)$ – функция релаксации, μ_0, μ_∞ – мгновенное и равновесное значения модуля, $G(t)$ – функция скорости релаксации, $H(t)$ – непрерывный спектр времен релаксации.

Введенные в выражении (1) материальные функции и постоянные для материалов с конечным равновесным модулем связаны между собой известными соотношениями [4]

$$R(t) = \mu_0\left[1 - \int_0^t G(\tau)d\tau\right] = \mu_\infty + \int_{-\infty}^{\infty} H(\ln s)\exp[-t/s]d(\ln s)$$

$$G(t) = -\frac{1}{R(0)}\frac{dR(t)}{dt}, \quad \mu_0 = R(0) = \mu_\infty + \int_0^\infty H(s)ds \quad (2)$$

$$\mu_\infty = R(\infty) = \mu_0\left[1 - \int_0^\infty G(\tau)d\tau\right] > 0$$

E-mail: adamov@icmm.ru (Адамов Анатолий Арсангалеевич).

Аналогичная проблема идентификации линейных операторов наследственной вязкоупругости возникает в моделях, использующих теорию конечных деформаций. Например, для модели вязкоупругого "неогукова тела" [5] экспериментальные данные по одноосному растяжению также представляются в виде линейного соотношения

$$f(t) = \varphi_3(t)\mu^*\varphi_1(t) + \varphi_4(t)\mu^*\varphi_2(t), \qquad (3)$$

где $f(t)$ – сила, отнесенная к начальной площади поперечного сечения образца, $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_4(t)$ – функции осевого относительного удлинения $l(t)$. Интегральный оператор μ^* введен аналогично выражениям (1), (2) и имеет смысл оператора модуля сдвига при малых деформациях.

Для полной идентификации оператора μ^* в интегральных уравнениях (1), (3) достаточно найти любую из трех функций влияния на интервале $t \in [0, \infty]$ путем решения обратной задачи, математически некорректной по Адамару [6]. Трудности реализации этого решения обусловлены ошибками измерения, статистическими вариациями функций $f(t)$ и $l(t)$, ограниченным диапазоном реализуемых в опытах скоростей изменения $f(t)$ и $l(t)$, конечным временным интервалом $t \in [0, t_{max}]$ их регистрации.

Следствием математической некорректности рассматриваемой обратной задачи и отмеченных выше обстоятельств является возможность существования множества допустимых решений задачи идентификации. Они практически с одинаковой точностью описывают один и тот же набор опытов, но существенно отличаются, в частности, значениями мгновенного модуля [7]. Особенно ярко эти следствия проявляются для материалов с широким спектром времен релаксации, например для эластомеров с различными наполнителями [2, 8].

Проблема неединственности решения задачи идентификации устраняется при использовании функций с дискретным распределением времен релаксации благодаря их асимптотическим свойствам. Но полученные при этом аппроксимации функций $R(t)$ или $G(t)$, как правило, также не удовлетворяют условиям решения полной задачи идентификации. Практическим критерием ее решения можно считать независимость значений мгновенного и равновесного модуля от вариации используемых экспериментальных данных в сторону увеличения скоростей деформации и времен наблюдения.

Известные графические, графоаналитические и численные методики определения функций влияния в линейной теории вязкоупругости [1–4, 9, 10] используют опыты на релаксацию и ползучесть при "мгновенном" задании деформации или нагрузки. Однако пренебрежение реальными условиями достижения заданных уровней деформации или напряжения в опытах на релаксацию и ползучесть вносит погрешность в соответствующие функции влияния на их начальных участках протяженностью порядка 5–10 значений времени задания деформации или нагрузки [11].

Другим общим недостатком известных методик является определение функций влияния без оценки их доверительных интервалов и интервала времени, на котором они идентифицированы.

Корректную проблему частичной идентификации оператора μ^* в интегральных уравнениях (1), (3) можно поставить как задачу приближенного определения функции релаксации $R(t)$ с известной погрешностью на конечном временно́м интервале $t_R \in (t_1, t_2)$, зависящем от свойств материала и используемых экспериментальных данных. Пример реализации такой математической постановки задачи подробно рассмотрен в работе [12], посвященной определению функции $H(t)$.

Цель настоящей работы – способ решения этой задачи частичной идентификации на основе выявления и статистической обработки множества решений полной задачи идентификации, обеспечивающих практически одинаковую точность аппроксимации используемой совокупности экспериментальных данных с различными реальными историями деформирования.

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Предлагаемая методика является развитием подхода к идентификации произвольного линейного оператора μ^* в уравнениях наследственной вязкоупругости по данным экспериментов с произвольной регистрируемой историей деформирования [13, 14]. Одновременно обрабатывается совокупность произвольного числа опытов на релаксацию, ползучесть, растяжение с различными скоростями, сложными историями деформирования. Допускается использование одного или нескольких видов напряженно-деформированного состояния, описываемых соотношениями типа (1), (3) с одним и тем же неизвестным оператором.

Для упрощения математической постановки и численного решения задачи идентификации на промежуточном этапе удобно использовать ана-

литическую аппроксимацию функции $G(t)$. В частности, она выбрана в виде [15]

$$G(t) = \frac{A\exp(-\beta t^m)}{t^{1-\alpha}}, \quad (4)$$

удовлетворяющем требованию достаточной функциональной гибкости в широком интервале времени [9, 10] при малом числе параметров. Допустимая область их изменения определяется неравенствами

$$0 < \alpha \le 1, \quad \beta > 0, \quad m \ge \alpha, \quad 0 \le A < \frac{m\beta^{\alpha/m}}{\Gamma(\alpha/m)}$$

Последнее из них соответствует условию существования положительного равновесного модуля

$$\mu_\infty = \mu_0\left[1 - \frac{A\Gamma(\alpha/m)}{m\beta^{\alpha/m}}\right] > 0,$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Тогда задача идентификации оператора μ^* с функцией релаксации (4) в интегральных уравнениях (1), (3) сводится к задаче минимизации целевой функция поиска $Z(\mu_0, A, \beta, \alpha, m) > 0$, которая может быть представлена среднеквадратичной относительной ε_{sq} или абсолютной невязкой, максимальной относительной невязкой ε_{max} или другими мерами оценки точности аппроксимации экспериментальных данных в заданных точках сравнения. Используемый при этом алгоритм поиска параметров должен учитывать математическую некорректность решаемой задачи, т.е. обладать способностью к выявлению множества локальных минимумов целевой функции.

Основным отличием данной методики от ранее использованных ее вариантов является нахождение и сохранение в процессе поиска всех комбинаций параметров, удовлетворяющих условию $Z \le Z_{min}(1 + \Delta)$, где Z_{min} – текущее минимальное значение целевой функции, Δ – малое положительное значение. Полученный набор n комбинаций параметров считается промежуточным результатом идентификации оператора μ^*.

Найденные комбинации параметров определяют семейство функций релаксации $R_i(t)$, $(i = \overline{1, n})$, которые трактуются как набор реализаций нестационарной случайной функции $R(t)$ на интервале времени $t \in [0, \infty)$ [16]. Для множества сечений этой случайной функции (желательно брать сечения с постоянным шагом по логарифму времени) вычисляются оценки математического ожидания (усредненной функции релаксации $\bar{R}(t)$) и меры рассеяния реализаций $\delta_R(t)$ (среднеквадратичного отклонения $\sigma(t)$, среднеквадратичного относительного отклонения $\delta_{sq}(t)$, максимального относительного отклонения $\delta_{max}(t)$).

Затем на основе полученных численных результатов назначается критериальное предельное значение δ_{RK} меры рассеяния реализаций $\delta_R(t)$ и определяется интервал времени $t_R \in (t_1, t_2)$, для которого $|\delta_R(t)| \le \delta_{RK}$. Считаем, что идентифицировали искомую функцию релаксации $R(t) = \bar{R}(t)$ на интервале времени $t_R \in (t_1, t_2)$ с критерием допустимого рассеяния δ_{RK}, заданным для выбранной меры рассеяния реализаций $\delta_R(t)$. Оценка доверительного интервала в каждом сечении случайной функции $\bar{R}(t)$ выполняется стандартными методами [16].

ПРИМЕРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Высокоэластичный материал с дисперсным наполнителем "1".

Экспериментальная информация представлена 16 опытами в условиях одноосного напряженного состояния: 4 опыта на растяжение со скоростями деформации от 3.4×10^{-5} до 3.4×10^{-2} с$^{-1}$ и 12 опытов на релаксацию в течение ~1000–6000 с, различающихся уровнем заданной деформации и скоростью его достижения (в указанном выше диапазоне). Использовано 80 точек сравнения, целевая функция поиска представлена среднеквадратичной относительной ошибкой ε_{sq}. Найдено $n = 13$ комбинаций параметров уравнения (1) с $G(t)$ в виде выражения (4) при $m = 1$. Их различие характеризуется величинами, лежащими в диапазонах: $\alpha \in (0.01, 0.05)$; $\beta \in (0.01, 0.02)$ мин$^{-1}$; $A \in (0.008673, 0.029101)$ мин$^{-\alpha}$; $\mu_0 \in (24.45, 76.28)$ МПа; $\mu_\infty \in (7.27, 8.27)$ МПа; $\varepsilon_{sq} \in (6.028, 6.092)$ %.

Эти комбинации параметров позволяют примерно с одинаковой точностью ($\Delta = 0.0106 \ll 1$) аппроксимировать исходную совокупность экспериментальных данных при различных историях деформирования. На рис. 1а приведены зависимости $\bar{R}(t)$, и $\delta_R(t) = \delta_{sq}(t)$ и $\delta_R(t) = \delta_{max}(t)$ выделена область $t_R \in (t_1, t_2)$ достоверной идентификации функции релаксации $R(t) = \bar{R}(t)$ с критериальными оценками $\delta_{RK}|\delta_{sq}(t)| \sim 0.028$ и $\delta_{RK}[\delta_{max}(t)] \sim 0.065$. Последняя критериальная оценка позволяет более четко по сравнению с $\sigma(t)$ и $\delta_{sq}(t)$ определить границы области $t_R \in (t_1, t_2)$, поэтому далее в качестве меры рассеяния реализаций используется только $\delta_R(t) = \delta_{max}(t)$.

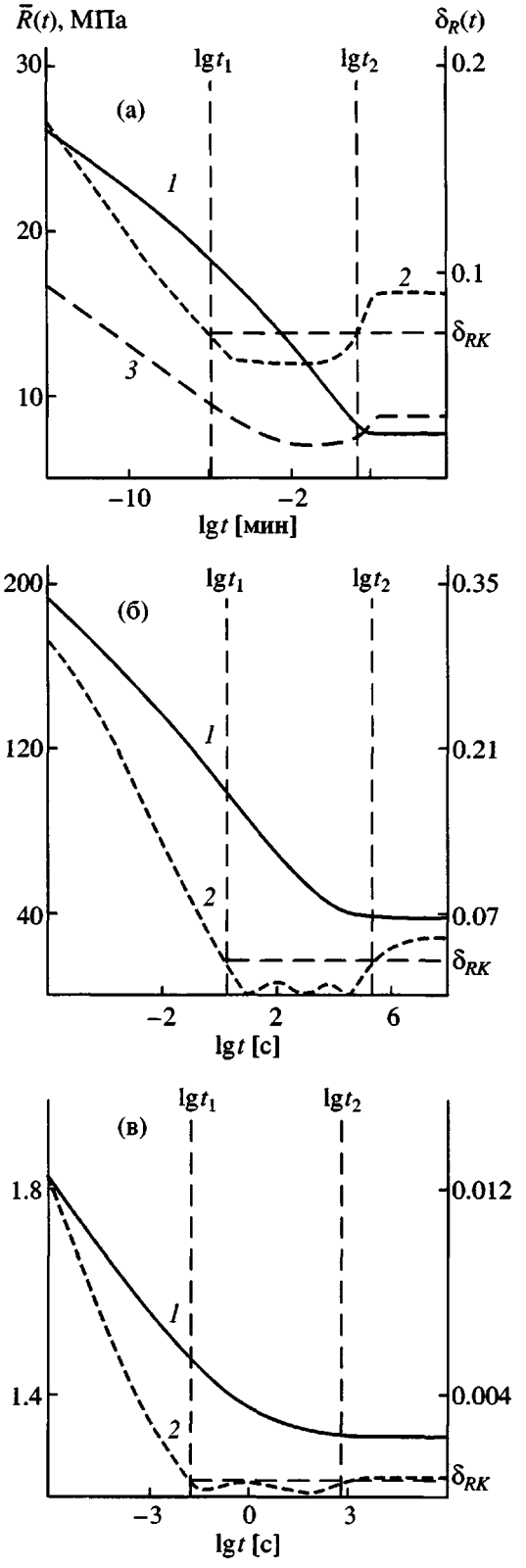

Рис. 1. Усредненная функция релаксации $\bar{R}(t)$ (*1*) и оценки отклонений от нее различных реализаций функции релаксации $\delta_R(t) = \delta_{max}(t)$ (*2*), $\delta_R(t) = \delta_{sq}(t)$ (*3*) для материалов "1" (а), "2" (б) и резины 18Н (в).

Высокоэластичный материал с дисперсным наполнителем "2".

Экспериментальные данные представлены при комнатной температуре шестью кривыми длительной ползучести, двумя кривыми релаксации с временами сравнения от 4 до 1×10^5 с. При использовании уравнения (3) с $G(t)$ в виде (4) определено 15 комбинаций параметров, имеющих μ_0 в диапазоне (139.387–1251.754) МПа и максимальную относительную ошибку аппроксимации $\varepsilon_{max} \in (6.7703, 7.2574)\%$.

Статистическая обработка реализаций функции релаксации представлена на рис. 1б. Числовые оценки точности аппроксимации экспериментальных данных и критериальная оценка рассеяния реализаций $R(t)$, оцененная по рис. 1б, имеют значения

$$Z_{min} = (\varepsilon_{max})_{min} = 0.067703$$

$$\Delta = 0.072, \quad \delta_{RK}[\delta_{max}(t)] \sim 0.024$$

Образцы резины 18Н (50 мас.ч. сажи) испытывали при комнатной температуре на релаксометре с электродинамической системой задания деформации. Обрабатывали кривую релаксации [17] с временем нагружения 0.02 с и временем наблюдения 3600 с. Результаты идентификации оператора μ^* для выражений (3), (4) по изложенной методике аналогичны представленным выше, определена 21 комбинация параметров со значениями $\mu_0 \in (4.2204–46.7745)$ МПа. Числовые оценки точности аппроксимации экспериментальных данных и критериальная оценка рассеяния реализаций $R(t)$

$$Z_{min} = (\varepsilon_{max})_{min} = 0.009283$$

$$\Delta = 0.0673, \quad \delta_{RK}[\delta_{max}(t)] \sim 0.0008$$

На рис. 1в приведены результаты статистической обработки полученных реализаций функции релаксации.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведенные результаты показывают, что усредненные кривые релаксации на интервале времени $t \in (t_1, t_2)$ имеют существенно меньшее рассеяние, чем наилучшие их реализации по отношению к аппроксимируемым экспериментальным данным. Поэтому усредненные кривые $\bar{R}(t)$ предпочтительны в качестве результата идентификации оператора μ^* на указанном интервале времени по сравнению с их частными реализациями. Для дальнейшего использования удобно аппроксимировать полученные значения $\bar{R}(t)$ на интер-

вале времени $t \in (t_1, t_2)$ сплайнами наилучшего приближения.

Соотношения, обратные (1), выражаются через линейный оператор податливости J^*, теоретически однозначно определяемый оператором модуля μ^* [3] при решении соответствующего интегрального уравнения относительно функции ползучести. Практическая реализация такого перехода осложнена изложенными выше обстоятельствами. Оказывается необходимым снова решать математически некорректную обратную задачу для приближенно заданной на конечном интервале времени функции релаксации. Поэтому для идентификации операторов наследственной вязкоупругости, выраженных через функции ползучести, можно напрямую использовать представленную методику, модифицировав ее очевидным образом.

Для прямого расширения интервала времени $t_R \in (t_1, t_2)$ в область малых значений реализована модификация изложенной методики с целью дополнительного использования экспериментальных данных по действительной и мнимой составляющим комплексного модуля, соответствующего оператору μ^*.

Значительное косвенное расширение интервала идентификации $t_R \in (t_1, t_2)$ можно осуществить при построении обобщенной кривой релаксационного модуля и функции температурно-временного сдвига в рамках гипотезы о термореологически простом поведении материала [1–4].

Рассмотренная процедура идентификации основана на регистрации полных историй факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние испытываемых образцов. Это обстоятельство существенно повышает эффективность использования экспериментальных данных с точки зрения идентификации вязкоупругих моделей в наиболее представительном диапазоне времени и является естественным для современных испытательных машин.

Определение усредненной функции релаксации с оценкой ее допустимого статистического разброса на определенном временного интервала позволяет аргументированно использовать результаты идентификации рассмотренного оператора в практических приложениях линейной теории вязкоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ферри Д.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Бартенев Г.М., Бартенева А.Г.* Релаксационные свойства полимеров. М.: Химия, 1992.
3. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
4. *Гольдман А.Я.* Прочность конструкционных материалов. Л.: Машиностроение, 1979.
5. *Адамов А.А.* Структурная механика неоднородных сред. Сб. науч. тр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 8.
6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
7. *Адамов А.А.* Исследования по механике полимеров и систем. Сб. науч. тр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1978. С. 16.
8. *Лукомская А.И., Евстратов В.Ф.* Основы прогнозирования механического поведения каучуков и резин. М.: Химия, 1975.
9. *Маньковский В.А., Розовский М.И.* // Прикл. механика. 1971. Т. 7. № 1. С. 18.
10. *Маньковский В.А.* // Механика композит. материалов. 1982. № 4. С. 579.
11. *Слонимский Г.Л.* // Журн. техн. физики. 1939. Т. 9. № 20. С. 1791.
12. *Орлов В.С.* // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 5. С. 77.
13. *Адамов А.А., Кузнецов Г.Б.* Прикладные задачи механики полимеров и систем. Сб. науч. тр. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 11.
14. *Адамов А.А.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Московский ин-т электронного машиностроения, 1980.
15. *Колтунов М.А.* Прочность и пластичность. Сб. науч. тр. М.: Наука, 1971. С. 277.
16. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.
17. *Дырда В.И., Адамов А.А., Мазнецова А.В., Селиванов Е.И.* Днепропетровск, 1984. 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.01.85, № 746.

A Statistical Approach to the Identification of Influence Functions in the Linear Viscoelasticity Theory

A. A. Adamov

Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Division, Russian Academy of Sciences, ul. akademika Koroleva 1, Perm, 614013 Russia

Abstract—A numerical technique suitable for identification of influence functions in the hereditary viscoelasticity theory with linear integral operators is considered. For the identification, experimental data with an arbitrary measured quasi-static history of the deformation process are used. A set of realizations of the influence function providing a satisfactory approximation of the experimental data is considered. The method proposed for statistical processing of these realizations makes it possible to find the averaged function and to estimate its dispersion and the limits of the time interval of reliable identification.