

УДК 541.64:539.3

О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПОЛИМЕРОВ

© 1997 г. В. В. Шевелев, Э. М. Карташов

Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова
117571 Москва, пр. Вернадского, 86Поступила в редакцию 27.11.96 г.
Принята в печать 25.12.96 г.

Исследована долговечность полимеров в области малых напряжений (левее порога Гриффитса). Получена асимптотика средней долговечности в указанной области. Показано, что не существует отличного от нуля растягивающего напряжения, безопасного для данного материала. Обнаружено увеличение разброса значений долговечности при уменьшении растягивающего напряжения, пропорциональное средней долговечности.

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] сформулирована концепция прочностных состояний образцов полимерных материалов, отражающая наблюдавшуюся в экспериментах по долговечности [2, 3] (а также ссылки в работе [4]) зависимость кинетики накопления разорванных связей от состояния структуры материала образца. Исследована кинетика хрупкого и квазихрупкого разрушения и долговечность образцов, находящихся в низкопрочном состоянии, т.е. содержащих начальные трещины. Было показано, что средняя долговечность τ образцов указанного типа определяется выражением

$$\tau = \sum_{\mu=s, v} \sum_{i=1}^{n_{\mu}} P_{i, \mu} \tau_{i, \mu}, \quad (1)$$

где $P_{i, \mu}$ – вероятность того, что из возможного набора $\sum_{\mu=s, v} n_{\mu}$ начальных трещин наибольшей трещиной в образце является трещина (i, μ) -типа (первый индекс указывает на то, что трещина имеет начальную длину $l_{i, \mu}$, а второй тип трещины – краевая $\mu = s$ или объемная $\mu = v$); $\tau_{i, \mu}$ – это “парциальные” долговечности, каждая из которых равна среднему времени, за которое трещина (i, μ) -типа разрушает образец. Значения $\tau_{i, \mu}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{i, \mu} &= \sum_{m=i}^{k-1} \frac{1}{W_+(l_{m, \mu})} \left[1 + \sum_{j=m+1}^{k-1} \prod_{n=m+1}^j \frac{W_-(l_{n, \mu})}{W_+(l_{n, \mu})} \right] + \\ &+ t_{i, \mu}^{(a)} = \langle \tau_{i, \mu} \rangle + t_{i, \mu}^{(a)} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $W_+(l_{j, \mu})$ и $W_-(l_{j, \mu})$ соответственно частоты разрыва и восстановления связей на фронте тре-

щины (j, μ) -типа, определенные в работе [1] на основе теории флюктуаций выражениями

$$W_+(l_{j, \mu}) = v \exp \left[-\frac{\Delta \Phi^+(l_{j, \mu}, \sigma)}{kT} \right], \quad j = i, i+1, \dots, k \quad (3)$$

$$W_-(l_{j, \mu}) = v' \exp \left[-\frac{\Delta \Phi^-(l_{j, \mu}, \sigma)}{kT} \right], \quad j = i+1, i+2, \dots, k-1, \quad (4)$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура; $\Delta \Phi^+$ и $\Delta \Phi^-$ – термодинамические потенциалы активации соответственно разрыва и восстановления связей на фронте трещины. Эти величины связаны между собою соотношением [1]

$$W_-(l_{j, \mu} + \lambda_j^*) = W_+(l_{j, \mu}) \exp \left[\frac{\lambda_j^* \partial \Delta \Phi(l, \sigma)}{kT} \right]_{l=l_{j, \mu}}, \quad j = i, i+1, \dots, K-2, \quad (5)$$

v и v' – частотные множители [1]; $\Delta \Phi$ – изменение термодинамического потенциала образца при образовании в нем трещины размера l ; $\lambda_j^* = \lambda_*$ – флюктуационное перемещение участка фронта трещины, обеспечивающее ее дальнейший безактивационный переход в соседнее состояние. Суммирование в выражении (2) ведется по всем состояниям, проходимым трещиной (i, μ) -типа в процессе ее эволюции от начального состояния с длиной $l_{i, \mu}$ до состояния, ближайшим соседом которого справа является поглощающее состояние с длиной $l_{k, \mu}$. Величина $l_{k, \mu} = L_{k, \mu}$ или $l_{k, \mu} = L_{i, \mu}$ в зависимости от того, меньше или больше критическая длина трещины $L_{k, \mu}$ (с которой начинается ее

атермический рост) характерного размера образца $L_{i,\mu}$ на пути роста трещины. Соответственно время роста трещины (i, μ) -типа на атермической стадии $t_{i,\mu}^{(a)}$ необходимо положить равным нулю при $L_{k,\mu} > L_{i,\mu}$.

В работе [1] было отмечено, что наибольший интерес с точки зрения эксплуатации изделий из полимеров представляет область малых растягивающих напряжений σ , лежащая левее порога Гриффитса. В связи с этим возникает вопрос о том, определяет ли такое напряжение интервал напряжений $(0, \sigma_G)$, на котором невозможно разрушение материала. По существу данный вопрос эквивалентен вопросу о характере предельного перехода в области малых напряжений: какое из двух следующих условий должно выполняться:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \tau(\sigma, T) = \infty \quad (6)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_G} \tau(\sigma, T) = \infty, \quad (\sigma_G > 0) \quad (7)$$

Существующие экспериментальные данные по долговечности полимеров [2, 4] не позволяют однозначно ответить на этот принципиальный вопрос физики прочности полимеров. Учитывая научную и практическую значимость указанных выше проблем, представляется необходимым теоретическое исследование процесса разрушения и долговечности полимеров в области малых напряжений, тем более, что характер предельных переходов (6) и (7) не допускает их строгую экспериментальную проверку. В связи с этим в настоящей работе продолжены исследования, начатые в работе [1], и рассмотрены следующие вопросы: средняя долговечность в области малых напряжений и критерий Гриффитса для низкопрочных образцов; разброс значений долговечности. Математические аспекты рассмотренных в работе проблем вынесены в Приложения.

КРИТЕРИЙ ГРИФФИТСА И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ НАЧАЛЬНЫЕ ТРЕЩИНЫ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

На рис. 1 представлена изотерма долговечности пленки ПММА, полученная нами по формулам (1) и (2), при тех же значениях параметров, что и в работе [1]. Поведение изотермы в области малых напряжений, типичное (согласно работе [5]) для полимеров, свидетельствует о справедливости условия (6), которое означает отсутствие отличного от нуля безопасного напряжения. На это же указывает и полученная нами асимптотика в области малых напряжений [5] (см. также

Приложение 1):

$$\tau \sim \exp \left[\frac{2\alpha_n E \lambda_\pi}{\pi \sigma^2 kT} \right] \quad (8)$$

Здесь α_n – удельная свободная поверхностная энергия ненапряженного материала, E – модуль Юнга.

Основной причиной такого поведения изотермы долговечности является глобальная неустойчивость материала, находящегося под действием растягивающей нагрузки σ , которая снимается разрушением материала.

Для выяснения кинетики разрушения материала в области малых напряжений рассмотрим выражение для скорости роста краевой трещины $v(l, \sigma) = W_+(l, \sigma) - W_-(l, \sigma)$, которое с учетом уравнения (5) определяется выражением

$$v(l, \sigma) = W_+(l, \sigma) \left[1 - \exp \left(\frac{\lambda_* \partial \Delta \Phi(l, \sigma)}{kT} \right) \right] \quad (9)$$

Здесь $W_+(l, \sigma)$ определено (3), в котором

$$\Delta \Phi^+(l, \sigma) = U - V_a \sigma^*(l, \sigma), \quad (10)$$

$U = \Delta \Phi^+(\sigma = 0)$ – энергия активации разрыва связей в отсутствие напряжений; $V_a = \lambda_* \lambda_\pi \lambda_m$ – флуктуационный объем; λ_m – коэффициент, имеющий размерность длины и характеризующий влияние локального напряжения на фронте трещины $\sigma^*(l, \sigma)$ на удельную свободную поверхностную энергию α_n^* в области разрыва связей [5, 6];

$$\sigma^*(l, \sigma) \approx \beta \sigma, \quad \beta = 1 + \chi \sqrt{l/\lambda_*}, \quad (11)$$

согласно работе [4]; $\chi = 0.79$ для краевой трещины [4]:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(l, \sigma) = & - \frac{\pi \sigma^2 \lambda_\pi}{2E} (l^2 - l_0^2) + 2\alpha_n \lambda_\pi (l - l_0) - \\ & - 2\lambda_m \lambda_\pi \int_{l_0}^l \sigma^*(l, \sigma) dl \end{aligned} \quad (12)$$

в соответствии с работами [5, 6]; l_0 – начальная длина трещины разрушения. (В этом разделе мы опустили индексы у обозначения длины трещины l , рассматривая, как и в работе [1], при расчетах τ вклад наиболее опасной краевой трещины (n_s, s)-типа.)

Скорость роста трещины обращается в нуль, когда $\partial \Delta \Phi / \partial l = 0$, что согласуется (в отличие от работ [2–4]) с термодинамическим условием равновесия. Это условие приводит к уравнению

$$-\frac{\pi \sigma^2 l / \lambda_\pi}{E} + 2\alpha_n \lambda_\pi - 2\lambda_m \lambda_\pi \sigma^*(l, \sigma) = 0 \quad (13)$$

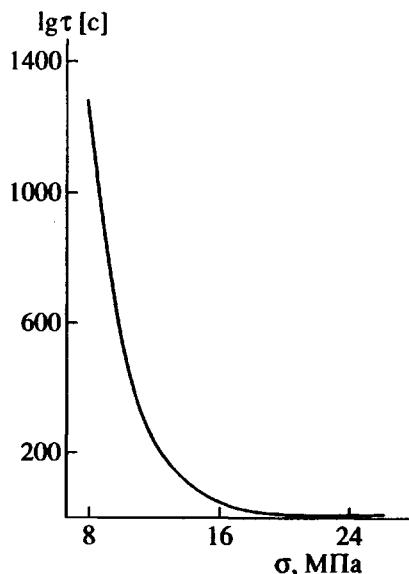


Рис. 1. Изотерма долговечности пленки ПММА в области малых напряжений.

Решая это уравнение относительно l при заданном σ , найдем выражение для длины трещины l^* , соответствующей состоянию ее неустойчивого равновесия [5, 6]

$$l^* = \lambda_* \left[\frac{\chi E \lambda_m}{\pi \sigma \lambda_*} \left(\sqrt{1 + \lambda_* \frac{2\pi(\alpha_n - \lambda_m \sigma)}{E \lambda_m^2 \chi^2}} - 1 \right) \right]^2 \quad (14)$$

Аналогично из уравнения (13) получим следующее выражение для напряжения σ_G , соответствующего этому же состоянию, для трещины данной начальной длины l_0

$$\sigma_G = \frac{\beta \lambda_m E}{\pi} \left[\sqrt{1 + \frac{2\pi \alpha_n}{\beta^2 \lambda_m^2 E}} - 1 \right] \quad (15)$$

Оба выражения переходят в известные соотношения типа Гриффитса для краевой трещины [2], установленные в рамках механического подхода, который в нашем обобщенном подходе соответствует предельному переходу $\lambda_m \rightarrow 0$. В области напряжений $\sigma > \sigma_G$ имеем $l_0 > l^*$, $v > 0$, и долговечность описывается выражениями (30), (32) из работы [1]. Если $\sigma < \sigma_G$, то $l_0 < l^*$, $v < 0$, так как $d\Delta\Phi/dl > 0$ в силу того, что условие (13) определяет максимум, а не минимум функции $\Delta\Phi(l, \sigma)$. В этом случае для того, чтобы разрушить образец, трещина разрушения должна преодолеть энергетический барьер величины $\Delta\Phi(l^*, \sigma)$, после чего ее скорость становится больше нуля. В силу термофлуктуационного характера процесса разрушения указанный барьер преодолевается в результате последовательности флюктуаций. Так как это в среднем происходит после большого

числа "неудачных" попыток преодолеть энергетический барьер, в результате средняя долговечность резко увеличивается с уменьшением σ по сравнению со случаем $\sigma > \sigma_G$. Таким образом, полученные результаты показывают, что напряжение σ_G , соответствующее критерию типа Гриффитса, в действительности не является безопасным напряжением, а представляет собой порог, начиная с которого средняя долговечность при уменьшении растягивающего напряжения резко растет (рис. 1).

РАЗБРОС ЗНАЧЕНИЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ

Предложенный подход позволяет оценить дисперсию значений долговечности образцов D_τ , находящихся в низкопрочном состоянии.

Исходя из функции распределения значений долговечности $\varphi(t)$, полученной в работе [1], имеем

$$D_\tau = \int_0^\infty t^2 \varphi(t) dt - \bar{\tau}^2 = \\ = \sum_{\mu=s, v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} (\langle t_{i,\mu}^2 \rangle - \langle t_{i,\mu}^{(a)} \rangle + 2(\langle t_{i,\mu}^{(a)} \rangle - \langle t^{(a)} \rangle) \times \\ \times (\langle t_{i,\mu} \rangle - \langle t^{(k)} \rangle)) - \langle t^{(k)} \rangle^2 - \langle t^{(a)} \rangle^2, \quad (16)$$

где

$$\langle t_{i,\mu}^m \rangle = W_+(l_{k-1,\mu}) \int_0^\infty t^m P_i(l_{k-1,\mu}, t) dt, \quad (17)$$

$$m = 1, 2; \quad \langle t_{i,\mu}^1 \rangle \equiv \langle t_{i,\mu} \rangle$$

определенены в Приложении 1; $P_i(l_{k-1,\mu}, t)$ – вероятность того, что трещина (i, μ) -типа в момент времени t находится в состоянии с длиной $l_{k-1,\mu} = L_{k,\mu} - \lambda^*$; среднее время разрушения материала на термофлуктуационной и атермической стадиях процесса

$$\langle t^{(k)} \rangle = \sum_{\mu=s, v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} \langle t_{i,\mu} \rangle \quad (18)$$

$$\langle t^{(a)} \rangle = \sum_{\mu=s, v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} t_{i,\mu}^{(a)}$$

В области малых напряжений вкладом атермической стадии процесса разрушения в величины τ и D_τ можно пренебречь и принять $\tau \approx \langle t^{(k)} \rangle$.

Тогда выражение (16) упрощается и может быть представлено в виде

$$D_\tau \approx \sum_{\mu=s,v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} \langle t_{i,\mu}^2 \rangle - \tau^2 \quad (19)$$

Оценим D_τ в этом случае, полагая (как это делалось в работе [1], а также при расчете τ), что трещиной разрушения является краевая трещина, резко выделяющаяся среди остальных своими размерами. Тогда, ограничиваясь в уравнении (16) одним наибольшим слагаемым ($i = n_s$), получим

$$D_\tau = P_{n_p,s} \langle t_{n_p,s}^2 \rangle - P_{n_p,s}^2 \tau_{n_p,s}^2 \quad (20)$$

В Приложении 1 показано, что $\langle t_{n_p,s}^2 \rangle \approx 2\tau_{n_p,s}^2$. С учетом этого из выражения (20) следует, что

$$D_\tau \approx \tau^2 \frac{2 - P_{n_p,s}}{P_{n_p,s}} \quad (21)$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение долговечности

$$\sigma_\tau \sim \tau, \quad (22)$$

т.е. растет с увеличением средней долговечности. Этот результат качественно согласуется с зависимостью размаха варьирования δ от $\lg \tau$ (рис. 2), полученной из экспериментальных данных [7].

В связи с формулой (22) возникает вопрос о том, какая минимальная долговечность $t_{\min}^{(p)}$ может быть гарантирована с заданной вероятностью p . Ответ на этот вопрос можно получить с помощью функции распределения значений долговечности $F(t)$, вычисляя $t_{\min}^{(p)}$ из уравнения

$$F(t_{\min}^{(p)}) = 1 - p, \quad (23)$$

где $F(t)$ определено [1]. Оценка, сделанная нами для $p = 0.99$ в том же приближении, что и представленные выше расчеты, привела к следующему результату (Приложение 2):

$$t_{\min}^{(p)} \approx \frac{l_{k,s} - l_0}{v e \lambda_*} \exp\left(\frac{U - V_a \sigma}{3kT}\right) \times \\ \times \left[\frac{\ln(1/p)}{N_{n_p,s}} \sqrt{\frac{2\pi(l_{k,s} - l_0)}{\lambda_*}} \right]^{\frac{l_{k,s} - l_0}{\lambda_*}} \quad (24)$$

Формула (24) показывает, что $t_{\min}^{(p)}$ много меньше, чем τ , рис. 3. Это означает, что из-за большой дисперсии невозможно гарантировать с достаточностью высокой вероятностью значительную долговечность даже в практически важной области малых напряжений. Этот результат согласуется с

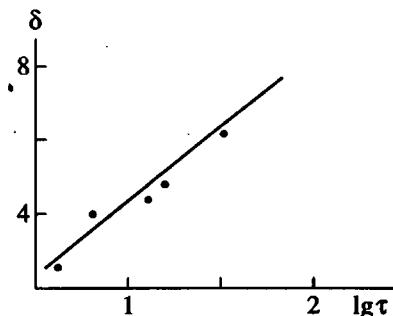


Рис. 2. Зависимость размаха варьирования δ от $\lg \tau$, полученная по результатам работы [7].

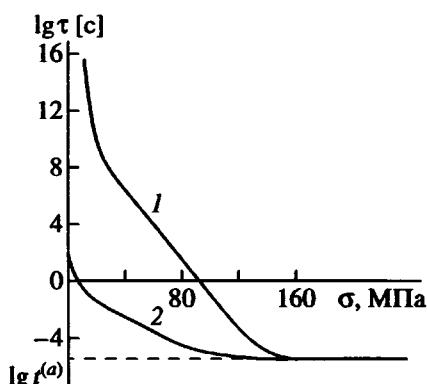


Рис. 3. Полная изотерма долговечности (1) и логарифм времени гарантированной работоспособности пленки ПММА (2), рассчитанные по формуле (2) и (24) соответственно. Данные для расчета взяты из работы [1].

экспериментальными данными по долговечности [7], приведенными также в работе [1], нижняя граница которых практически не меняется с уменьшением σ . Основным фактором, обуславливающим этот эффект, является вызванное стохастичностью процесса разрушения увеличение, согласно формуле (22), разброса значений долговечности с уменьшением растягивающего напряжения. Как будет показано в последующей публикации, уменьшить разброс значений долговечности, а значит, повысить надежность изделий из полимеров, можно путем создания образцов с многоэлементной структурой. Последнее реализуется, например, в композиционных материалах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дисперсия долговечности и асимптотика средней долговечности в области малых напряжений

В работе [5] было получено выражение (2) для средней долговечности образца с трещиной разрушения (i, μ -типа) путем умножения кинетических

уравнений, описывающих развитие трещины указанного типа

$$\frac{dP_i(l_{m,\mu}, t)}{dt} = W_+(l_{m-1,\mu})P_i(l_{m-1,\mu}, t) - \\ - [W_+(l_{m,\mu}) + W_-(l_{m,\mu})]P_i(l_{m,\mu}, t) + W_-(l_{m+1,\mu}) \times \\ \times P_i(l_{m+1,\mu}, t), \quad m = i+1, i+2, \dots, k-1, t > 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dP_i(l_{i,\mu}, t)}{dt} = -W_+(l_{i,\mu})P_i(l_{i,\mu}, t) + \\ + W_-(l_{i+1,\mu})P_i(l_{i+1,\mu}, t), \quad t > 0 \quad (1.2)$$

$$P_i(l_{k,\mu}, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

$$P_i(l_{m,\mu}, 0) = \delta_{mi} \quad (1.4)$$

на t и интегрирования по t от 0 до ∞ . (δ_{mi} – символ Кронекера.) В результате получим разностное уравнение

$$J_{n-1,\mu}^{(i)} - J_{n,\mu}^{(i)} = -Q_{n,\mu}^{(i)}, \quad n = i+1, i+2, \dots, k-1 \quad (1.5)$$

с граничным условием

$$J_{i,\mu}^{(i)} = Q_{i,\mu}^{(i)}, \quad (1.6)$$

где

$$J_{n,\mu}^{(i)} = W_+(l_{n,\mu})\Psi_{n,\mu}^{(i)} - W_-(l_{n+1,\mu})\Psi_{n+1,\mu}^{(i)}, \quad (1.7)$$

$$Q_{n,\mu}^{(i)} = \int_0^\infty t P_i(l_{n,\mu}, t) dt \quad (1.8)$$

$$\Psi_{n,\mu}^{(i)} = \int_0^\infty t P_i(l_{n,\mu}, t) dt, \quad (1.9)$$

$$n = i+1, i+2, \dots, k-1$$

В работе [5] было получено решение разностного уравнения (1.5) в виде

$$J_{n,\mu}^{(i)} = \sum_{m=i}^n Q_{m,\mu}^{(i)}, \quad n = i, i+1, \dots, k-1, \quad (1.10)$$

где

$$Q_{m,\mu}^{(i)} = \frac{1}{W_+(l_{m,\mu})} \left[1 + \sum_{j=m+1}^{k-1} \prod_{n=m+1}^j \frac{W_-(l_{n,\mu})}{W_+(l_{n,\mu})} \right], \quad (1.11)$$

$$m = i, i+1, \dots, k-1$$

При этом искомая величина $\tau_{i,\mu}$ может быть вычислена по формуле

$$\tau_{i,\mu} = J_{k-1,\mu}^{(i)} + t_{i,\mu}^{(a)} \equiv W_+(l_{k-1,\mu})\Psi_{k-1,\mu}^{(i)} + t_{i,\mu}^{(a)} \quad (1.12)$$

Величины $\langle t_{i,\mu}^2 \rangle$, определяемые выражением (17) и входящие в формулу (16), находятся аналогичным образом. Для этого необходимо умножить соотношения (1.1)–(1.4) на t^2 и проинтегрировать по t от 0 до ∞ . В результате получим следующую разностную задачу:

$$U_{n-1,\mu}^{(i)} - U_{n,\mu}^{(i)} = 2\Psi_{n,\mu}^{(i)}, \quad n = i+1, i+2, \dots, k-1 \quad (1.13)$$

$$U_{i,\mu}^{(i)} = 2\Psi_{i,\mu}^{(i)} \quad (1.14)$$

Здесь

$$U_{n,\mu}^{(i)} = \langle t_{n,\mu}^2(i) \rangle - \frac{W_-(l_{n+1,\mu})}{W_+(l_{n+1,\mu})} \langle t_{n+1,\mu}^2(i) \rangle \quad (1.15)$$

Решая затем уравнение (1.13) с учетом формулы (1.14), найдем величины $U_{n,\mu}^{(i)}$

$$U_{n,\mu}^{(i)} = 2 \sum_{m=i}^n \Psi_{m,\mu}^{(i)} \quad (1.16)$$

Зная теперь $U_{n,\mu}^{(i)}$ и принимая во внимание, что $\langle t_{k,\mu}^2(0) \rangle = 0$ в силу (1.3), получим, решая (1.15)

$$\langle t_{n,\mu}^2(i) \rangle = \sum_{j=n}^{k-1} U_{j,\mu}^{(i)} \prod_{m=j+1}^{k-1} \frac{W_-(l_{m,\mu})}{W_+(l_{m,\mu})}, \quad n = i+1, i+2, \dots, k-1 \quad (1.17)$$

Интересующую нас величину $\langle t_{i,\mu}^2 \rangle$ найдем из (1.17) при $n = k-1$, подставив в это выражение $U_{n,\mu}^{(i)}$ из (1.16). В результате получим

$$\langle t_{i,\mu}^2(i) \rangle \equiv \langle t_{k-1,\mu}^2(i) \rangle = 2 \sum_{m=i}^{k-1} \Psi_{m,\mu}^{(i)} \quad (1.18)$$

Величины $\Psi_{m,\mu}^{(i)}$, входящие в (1.18), находятся из (1.7), решая которое с учетом (1.10) и (1.11), имеем

$$\Psi_{n,\mu}^{(i)} = \frac{1}{W_+(l_{n,\mu})} \sum_{j=n}^{k-1} \sum_{v=i}^j \frac{1}{W_+(l_{v,\mu})} \times \\ \times \left[1 + \sum_{\lambda=v+1}^{k-1} \prod_{m=j+1}^{\lambda} \frac{W_-(l_{m,\mu})}{W_+(l_{m,\mu})} \right] \prod_{\alpha=n+1}^j \frac{W_-(l_{\alpha,\mu})}{W_+(l_{\alpha,\mu})} \quad (1.19)$$

Для оценки величин $\langle t_{i,\mu} \rangle = W_+(l_{k-1,\mu})\Psi_{k-1,\mu}^{(i)}$ в области малых напряжений заменим в формуле (2) суммы интегралами и воспользуемся

соотношением (5). Получим

$$\langle t_{i,\mu} \rangle = \frac{1}{\lambda_*} \int_{l_{i,\mu}}^{l_{k-1,\mu}} \exp(f(l)) dl, \quad (1.20)$$

где

$$f(l) = \ln \left[\frac{1}{W_+(l)} + \frac{1}{\lambda_*} \exp(-G(l)) \times \right. \\ \left. \times \int_{l+\lambda_*}^{l_{k-1,\mu}} \exp(G(x)) \frac{dx}{W_+(x)} \right] \quad (1.21)$$

$$G(l) = \frac{\Delta\Phi(l, \sigma)}{kT}$$

Функция $f(l)$ имеет максимум при $l = l_{i,\mu}$ [5]. Тогда, оценивая выражение (1.20) методом Лапласа [8], найдем, что

$$\langle t_{i,\mu} \rangle \approx -\exp(f(l_{i,\mu})) / (\lambda_* f'(l_{i,\mu})) \quad (1.22)$$

Функция $G(l)$ имеет максимум при $l = l^* > l_{i,\mu}$, где l^* – физический корень уравнения $\partial\Delta\Phi/\partial l = 0$ (13), определенный выражением (14). Тогда входящие в выражение (1.22) интегралы можно оценить тем же методом [8]. Это после несложных преобразований приводит к следующему выражению для $\langle t_{i,\mu} \rangle \approx \tau_{i,\mu}$ в области малых напряжений:

$$\langle t_{i,\mu} \rangle \approx \frac{\exp(G(l^*))}{\lambda_*^2 G'(l_{i,\mu}) W_+(l^*)} \sqrt{\frac{2\pi}{|G''(l^*)|}} \quad (1.23)$$

$$G'' = \partial^2 G / \partial l^2$$

Из (1.23) следует (8), если воспользоваться (12).

Для оценки $\langle t_{i,\mu}^2 \rangle$ в наиболее интересной области малых напряжений $0 < \sigma < \sigma_G$ заменим суммы, входящие в (1.18), интегралами и воспользуемся (5). В результате формула (1.18) примет вид

$$\langle t_{i,\mu}^2 \rangle \approx \frac{2}{\lambda_*} \int_{l_{i,\mu}}^{l_{k-1,\mu}} e^{g(x, \mu)} dx, \quad (1.24)$$

где

$$g(x, \mu) = \ln \psi(x, \mu) \quad (1.25)$$

$$\psi(x, \mu) \approx \frac{1}{\lambda_*^2} e^{-G(x)} \int_x^{l_{k-1,\mu}} \frac{dz}{W_+(z)} e^{G(z)} \int_z^{l_{i,\mu}} e^{f(y)} dy \quad (1.26)$$

В работе [5] было показано, что $g(x, \mu)$ убывает и имеет максимум при $x = l_{i,\mu}$. Тогда, оценивая

интеграл в (1.24), как и интеграл в (1.21), и учитывая при этом (1.25), получим

$$\langle t_{i,\mu}^2 \rangle \approx -\frac{2\psi^2(l_{i,\mu})}{\lambda_* \psi'(l_{i,\mu})} = \frac{2\psi(l_{i,\mu})}{G'(l_{i,\mu})} \quad (1.27)$$

где учтено, что, согласно (1.25) и (1.26), $\psi'(l_{i,\mu}) = -\psi(l_{i,\mu})G'(l_{i,\mu})/\lambda_*$; внутренний интеграл в (1.26) оценивается так же, как и интеграл в (1.20), что приводит к выражению ($G(l_{i,\mu}) = 0$):

$$\psi(l_{i,\mu}) \approx \frac{1}{\lambda_*} \langle t_{i,\mu} \rangle \int_{l_{i,\mu}}^{l_{k-1,\mu}} e^{G(z)} \frac{dz}{W_+(z)} \quad (1.28)$$

Оставшийся интеграл оценивается выражением

$$\int_{l_{i,\mu}}^{l_{k-1,\mu}} e^{G(z)} \frac{dz}{W_+(z)} \approx e^{G(l^*)} \sqrt{\frac{2\pi}{|G''(l^*)|}} \frac{1}{W_+(l^*)} \quad (1.29)$$

Подставляя (1.29) в (1.28), а затем в (1.27), и учитывая при этом (1.23), имеем

$$\langle t_{i,\mu}^2 \rangle \approx 2 \langle t_{i,\mu} \rangle^2 \quad (1.30)$$

Учитывая, что в области напряжений $0 < \sigma < \sigma_G$, $\tau = \langle t_{i,\mu} \rangle$, получим (21).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Оценка гарантированной с заданной вероятностью долговечности

Найдем долговечность $t_{\min}^{(p)}$, которая гарантируется с практической достоверностью, т.е., например, с вероятностью $p = 0.99$. Величина $t_{\min}^{(p)}$ определяется уравнением

$$P(t \geq t_{\min}^{(p)}) = 1 - P(t < t_{\min}^{(p)}) = 1 - F(t_{\min}^{(p)}) \quad (2.1)$$

Откуда следует выражение (23). В случае, когда $1 - p \sim 0$, $F(t_{\min}^{(p)}) \approx 0$. Это означает, что $t_{\min}^{(p)} < \tau$, т.е. лежит значительно левее моды функции $\phi(t)$. Поэтому в уравнении (2.1) при вычислении $t_{\min}^{(p)}$ можно воспользоваться асимптотикой $\phi_{i,\mu}(t)$ при малых t , полученной в работе [1].

$$\phi_{i,\mu}(t) = (t - t_{i,\mu}^{(a)})^{\frac{l_{k-1,\mu} - l_{i,\mu}}{\lambda_*}} \times \\ \times \prod_{j=i}^{k-1} W_+(l_{j,\mu}) / \left(\frac{l_{k-1,\mu} - l_{i,\mu}}{\lambda_*} \right)! \quad (2.2)$$

Здесь $\phi_{i,\mu}(t)$ – плотность распределения вероятностей времени разрушения образца трещиной (i, μ) -типа, через которую выражается, согласно

работе [1], плотность распределения вероятностей долговечности $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \sum_{\mu=s,v} \sum_{i=1}^{n_\mu} P_{i,\mu} \Phi_{i,\mu}(t) \quad (2.3)$$

Кроме того, для образцов, находящихся в низкотрещиноватом состоянии, достаточно ограничиться вкладом в $\Phi(t)$ наиболее опасной трещины, которую, без существенного ограничения общности, можно считать краевой трещиной. Подставляя в уравнение (23)

$$F(t_{\min}^{(p)}) = \int_{t_{n_r,s}^{(a)}}^{t_{\min}^{(a)}} \Phi_{n_r,s}(t) dt,$$

где $\Phi_{n_r,s}(t)$ определено выражением (2.2), получим

$$t_{\min}^{(p)} = \left[\frac{((l_k - l_0)/\lambda_*)!}{N_{n_r}} \ln \frac{1}{p} \prod_{m=0}^{k-1} W_+(l_m) \right]^{\frac{l_k - l_0}{\lambda_*}} + t_{n_r,s}^{(a)} \quad (2.4)$$

Оценивая $((l_k - l_0)/\lambda_*)!$ по формуле Стирлинга [9], подставляя в формулу (2.4) выражение (3) для $W_+(l_{m,\mu})$, учитывая при этом уравнения (10), (11) и

замены получающиеся при этом суммы интегралами, получим, принимая во внимание, что в области напряжений $0 < \sigma < \sigma_G$, $l_k \gg l_0$, формулу (24), в которой $\bar{N}_{n_r,s}$ – среднее число трещин (n_r, s)-типа в образце [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевелев В.В., Карташов Э.М. // Высокомолек. соед. Б. 1997. Т. 39. № 2. С. 371.
2. Бартенев Г.М. Прочность и механизм разрушения полимеров. М.: Химия, 1984.
3. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978.
4. Карташов Э.М. // Итоги науки и техники. Серия Химия и технология высокомолекулярных соединений. 1991. Т. 27.
5. Шевелев В.В. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МИТХГ им. М.В. Ломоносова, 1993.
6. Карташов Э.М., Шевелев В.В., Валишин А.А., Бартенев Г.М. // Высокомолек. соед. А. 1986. Т. 28. № 4. С. 805.
7. Бартенев Г.М., Каримов С.Н., Нарзуллаев Б.Н., Цой Б., Шерматов Д. // Высокомолек. соед. А. 1982. Т. 24. № 9. С. 1981.
8. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целевые функции. М.: Наука, 1979.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Some Statistical Aspects of the Brittle Fracture and Durability of Polymers

V. V. Shevelev and E. M. Kartashov

Lomonosov State Academy of Fine Chemical Technology,
pr. Vernadskogo 86, Moscow, 117571 Russia

The durability of polymers was studied in the region of low stresses (on the left of the Griffith threshold). An asymptotic behavior of the average durability in this region was established. It is demonstrated that no tensile stress different from zero can be safe for any given material. It was found that a decrease in the tensile stress leads to an increase in the scatter of durability values, which is proportional to the average durability.