

УДК 541.64:539.2.537.618

ТЕОРИЯ ПЕРЕХОДОВ ФРЕДЕРИКСА В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛАХ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЗАМКНУТЫХ ОБЛАСТЯХ, ПОМЕЩЕННЫХ В НЕОДНОРОДНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ¹

© 1995 г. Э. Л. Аэро

Институт проблем машиноведения Российской академии наук
199178 Санкт-Петербург, Большой пр., 61

Поступила в редакцию 05.12.94 г.

Теория упругих деформаций изгиба нематических жидкых кристаллов обобщена на случай двумерных полей директора $I(x, y)$ в замкнутых ячейках криволинейной геометрии, помещенных в неоднородное магнитное поле $H(x, y)$. Предложен общий метод решения нелинейного уравнения ориентационного континуума. Найдены выражения для двумерных полей директора $I(x, y)$ в разнообразных по форме ячейках. Решена проблема неустойчивости деформаций – переходов типа Фредерикса, традиционно рассматриваемых лишь в плоскопараллельных слоях. Показана возможность пороговых эффектов при переходе от одного неоднородного поля директора $I_0(x, y)$ к другому $I_1(x, y)$. Получены обобщенные критерии перехода. Для ячейки прямоугольной формы установлено влияние продольного и поперечного размера на переход Фредерикса. Показано, что боковые стенки могут полностью снять возможность перехода даже при весьма больших разориентирующих магнитных полях. Теория может найти применение при анализе поведения нематических жидких кристаллов в узких порах, трещинах, микрокапиллярах, микрокапсулах, а также приборах отображения и обработки информации на жидких кристаллах. Теория носит общий характер и справедлива для всех классов жидких кристаллов, обладающих ориентационной упругостью, будь то "классические" или полимерные жидкые кристаллы.

Одно из плодотворных направлений в физике жидких кристаллов связано с исследованием их поведения в магнитных и электрических полях. Фундаментальные экспериментальные результаты были получены еще в довоенные годы В.К. Фредериксом, А.Н. Репьевой, В.В. Золиной и В.Н. Цветковым [1 - 5], которые окончательно решили принципиальный вопрос о природе ориентирующих сил в этих полях в пользу диамагнитной и диэлектрической анизотропии, вопреки распространенной до этого концепции дипольных сил. Они установили также пороговый характер деформаций нематических жидких кристаллов. Хотя в работах зарубежных теоретиков (Озеен [6], Чохер [7]) и экспериментаторов (Ван-Вик [8]) были получены также важные результаты, касающиеся природы ориентирующих сил и континуальной теории их описания, завершающий шаг в становлении этой области был сделан К.В. Фредериксом. Опираясь на работы своих учеников (А.Н. Репевой, В.В. Золиной и В.Н. Цветкова) он дал теоретическое описание порогового характера эффекта деформации нематического жидкого кристалла в плоскопараллельном слое под влиянием магнитного поля и стенок кюветы. В.К. Фредерикс впервые написал в окончательной форме

нелинейное уравнение ориентационных деформаций в плоском слое [3]

$$k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \chi_a H^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (1)$$

Здесь φ – угловые отклонения в результате воздействия поля H . Правда, константы k и χ_a он обозначил иначе. Далее он нашел решение в виде эллиптической функции и из граничных условий определил условие существования решения, т.е. выражение для порогового поля H_n и толщины слоя h_n

$$H_n h_n = \pi \sqrt{k / \chi_a}. \quad (2)$$

Позднее в работе [5] совместно с В.Н. Цветковым этот подход был использован применительно к деформированию нематических жидких кристаллов (НЖК) совместно электрическим и магнитным полями. Данная схема анализа вполне современна и используется до сих пор. Недаром соотношение (2) и соответствующее явление в электрических и магнитных полях носит имя В.К. Фредерикса: Этот эффект оказался одним из фундаментальных в физике жидких кристаллов, а интерес к нему – непреходящим.

Универсальный характер данного явления прояснился в математическом отношении в последнее время после того, как удалось продвинуться в область двумерных ориентационных и

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01018а).

магнитных полей $\mathbf{I}(x, y)$, $\mathbf{H}(x, y)$. Оказалось, что двумерные деформации следуют из нелинейного (двумерного) уравнения синус-Гельмгольца, широко известного в теоретической физике как универсальное уравнение, солитонные решения которого описывают многие внешние различные явления в природе. В связи с этим изучение переходов Фредерикса представляет в науке и общий интерес. В отношении же практических приложений следует отметить, что именно двумерные, а не одномерные задачи позволяют вплотную приблизиться к реальным условиям, в которых применяются НЖК. Это приборы и устройства отображения и обработки информации. Здесь НЖК используются в замкнутых объемах, а несущие информацию поля (электрическое и магнитное) и поле директора \mathbf{I} как минимум двумерны. Сюда же относятся и методы диагностики, дефектоскопии и неразрушающего контроля электрических и магнитных полей, полей излучений и дефектов поверхности.

Необходимость адекватной теории была ясна давно, однако общие уравнения теории упругости НЖК долгое время были недоступны сколько-нибудь общему анализу. В настоящей работе излагаются результаты, свидетельствующие о некотором продвижении в решении общей проблемы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общее уравнение ориентационных изгибных деформаций НЖК в магнитном поле имеет вид

$$\mathbf{I} \times [k_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{I} - k_3 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{I} + \chi_a \mathbf{H}(\mathbf{I}, \mathbf{H})] = 0. \quad (3)$$

Здесь k_1 , k_3 – упругие модули (Озенна–Франка) продольного и поперечного изгиба силовых линий поля директора \mathbf{I} , χ_a – диамагнитная анизотропия НЖК.

Будем рассматривать случай, когда векторы магнитного поля \mathbf{H} и ориентационного поля \mathbf{I} лежат в одной плоскости (x, y) , т.е. $I_z = H_z = 0$. Поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{I} = 0$, чем исключаются деформации кручения и соответствующий член в выражении (3) отсутствует. Введем теперь углы ориентации ϕ и ψ векторов \mathbf{I} и \mathbf{H} относительно оси Oy , соотношениями

$$\begin{aligned} I_x &= \sin \phi, & I_y &= \cos \phi, \\ H_x &= H \sin \psi, & H_y &= H \cos \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, примем, что

$$k_1 = k_3 = k. \quad (5)$$

Данное допущение оправдывается для некоторых НЖК точно [9] и для ряда других – приближенно. В результате в выражении (3) в силу тождества $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ остается лишь один диф-

ференциальный оператор ∇^2 . С учетом же формул плоских полей (4) уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} k \nabla^2(2\alpha) - \chi_a H^2 \sin 2\alpha &= -k \nabla^2(2\psi), \\ \alpha &= \phi - \psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ∇^2 – двумерный оператор Лапласа в плоскости (x, y) . Это уравнение содержит три неизвестные функции – ψ , H и угол α взаимной ориентации векторов \mathbf{I} и \mathbf{H} . Две первые (ψ и H) входят в уравнения магнитного поля, которые, вообще говоря, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 4\pi \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ B_i &= H_i + 4\pi \chi_{ik} H_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Диамагнитная восприимчивость НЖК весьма мала. В гауссовой системе единиц $|\chi| \sim 10^{-6} - 10^{-7}$. Поэтому с большой точностью можно принять, что $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Тогда уравнения (7) становятся независимыми от выражения (6) и поле \mathbf{H} в нем можно считать чисто внешним. За редким исключением будем считать, что электрические токи отсутствуют ($\mathbf{j} = 0$), а поле порождено намагниченными границами области или удаленными массами. В этом случае

$$\mathbf{H} = \operatorname{grad} \mu, \quad \nabla^2 \mu = 0. \quad (8)$$

Здесь μ – магнитный квазипотенциал.

Очевидно

$$\psi = \operatorname{arctg}(H_x/H_y) = \operatorname{arctg}(\mu'_x/\mu'_y), \quad (9)$$

где μ'_x , μ'_y – производные по указанным переменным.

Решая магнитную задачу (уравнение Лапласа для магнитного потенциала μ) и пользуясь затем формулами (8) и (9), находим функции $H(x, y)$, $\psi(x, y)$. Тогда остается решить уравнение (6) относительно функции $\alpha(x, y)$ – угла взаимной ориентации векторов \mathbf{I} и \mathbf{H} .

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДВУМЕРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗГИБА

Решение нелинейного уравнения (6), содержащего неоднородный член $\nabla^2 \psi$ и переменный коэффициент $H^2(x, y)$ представляет собой весьма сложную задачу, и здесь будет предложен метод преобразования (4) к более простому виду. Основные его положения были развиты нами в работах [10, 11].

Принципиальную роль играют условия потенциальности магнитного поля (8). Покажем, что в этом случае для угла ориентации вектора выполняется уравнение

$$\nabla^2 \psi = 0. \quad (10)$$

Действительно, дифференцируя формулы для магнитного поля (9) и используя соотношения между его производными, вытекающие из уравнений Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, легко получим вначале, что

$$\psi'_x = -\frac{1}{2} (\ln H^2)'_y, \quad \psi'_y = \frac{1}{2} (\ln H^2)'_x. \quad (11)$$

Штрихи сверху означают частные производные. Далее, дифференцируя первое по x , а второе по y и складывая полученные соотношения, приходим к желаемому результату (10).

Таким образом, уравнение (6) в случае потенциальных магнитных полей (когда отсутствуют электрические токи) фактически не содержит неоднородного члена.

Дальнейшее упрощение также связано с потенциальностью магнитных полей. Как известно из теории поля [12], при конформном преобразовании координат x, y к ортогональным криволинейным координатам $\mu(x, y), \eta(x, y)$, т.е. сопряженным магнитным потенциалам, двумерный оператор Лапласа ∇^2 преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= H^2 \nabla_\mu^2, \quad \nabla_\mu^2 = \partial^2 / \partial \mu^2 + \partial^2 / \partial \eta^2, \\ x + iy &\longrightarrow \eta + i\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, что уравнение $\mu(x, y) = \text{const}$ описывает эквипотенциали магнитного поля, а $\eta(x, y) = \text{const}$ – его силовые линии. Сопряженные магнитные потенциалы μ и η удовлетворяют уравнениям Лапласа и соотношениям Коши–Римана

$$\eta'_x = \mu'_y, \quad \eta'_y = -\mu'_x, \quad \nabla^2 \mu = \nabla^2 \eta = 0. \quad (13)$$

Заметим, что при конформном преобразовании углы между двумя векторами (каковым является α) сохраняются.

Ясно, что в силу первой формулы (12) можно избавиться в выражении (6) от неприятного множителя $H^2(x, y)$. Тогда, принимая во внимание и формулу (10), можем записать ориентационное уравнение (6) так:

$$\mu_x^2 \nabla_\mu^2(2\alpha) - \sin 2\alpha = 0, \quad \mu_x^2 = k/\chi_a. \quad (14)$$

Очевидно, μ_x – характеристический потенциал НЖК, представляющий масштаб обратных угловых градиентов в плоскости (μ, η) .

Иногда удобнее вместо α пользоваться дополнительным углом β , меняющимся симметрично с величиной закрутки директора I . Тогда уравнение (14) примет вид

$$\mu_x^2 \nabla_\mu^2(2\beta) + \sin 2\beta = 0, \quad 2\beta = \pi - 2\alpha. \quad (15)$$

Здесь знак перед вторым членом изменился на обратный.

Уравнения (14), (15) известны как двумерные уравнения синус–Гельмгольца. Методы их решения в определенной мере разработаны и будут обсуждаться. Таким образом, мы пришли к важному результату. Задачу об ориентационных изгибных деформациях целесообразно решать вначале в переменных μ, η , далее нужно перейти в реальное пространство (x, y) , используя известные решения магнитных задач $\mu(x, y), \eta(x, y)$ или находя их хорошо разработанными приемами. Очевидно, общее решение уравнения (6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \alpha + \psi = \\ &= \alpha [\mu(x, y), \eta(x, y)] + \psi [H_x(x, y), H_y(x, y)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\psi(x, y) = \operatorname{arctg}(H_x/H_y), \quad H_x = \mu'_x, \quad H_y = \mu'_y. \quad (17)$$

Эти соотношения означают, что от формул магнитного поля $\mu(x, y), \eta(x, y)$ можно прямо перейти к ориентационному полю $\Phi(x, y)$. Функции α и ψ , отражающие эту связь, являются решениями известных уравнений (10), (14). Отметим универсальный характер данного представления – оно получено в результате преобразования уравнений безотносительно к граничным условиям и геометрии реальной области (ячейки) в плоскости (x, y) . Эта универсальность проявляется в том, что с помощью одной и той же функции $\alpha(\mu, \eta)$ можно, подставляя в нее различные решения магнитных задач $\mu_m(x, y), \eta_m(x, y)$, получить целый класс ориентационных полей $\alpha_m(x, y) = \alpha(\mu_m, \eta_m)$. Такая производящая функция $\alpha(\mu, \eta)$ строится, конечно, как решение (14) для некоторой области S_μ в плоскости (μ, η) при определенных значениях α , на ее границе.

Возникает вопрос, как S_μ и α связаны с реальной, вообще говоря, криволинейной областью S_z на плоскости (x, y) и заданной на ней граничной функцией $\alpha(x_s, y_s)$. Ответ оказывается простым. В силу свойств конформных преобразований $x + iy \longrightarrow \eta + i\mu$ угол между двумя векторами (каковым является α) сохраняется при переходе из плоскости (x, y) в (μ, η) и обратно. Поэтому граничные значения в соответственных точках $(x, y), (\mu, \eta)$ просто одинаковы. Что касается геометрии области S_μ , то она получается из заданной S_z с помощью конформного преобразования $x + iy \longrightarrow \eta_m + i\mu_m$, где $\mu_m(x, y), \eta_m(x, y)$ – известное решение конкретной магнитной задачи в области S_z . Класс функций $\alpha_m(x, y)$, порождаемых одной производящей функцией $\alpha(\mu, \eta)$, задается множеством функций $\mu_m(x, y), \eta_m(x, y)$, преобразующих множество областей S_z в одну – S_μ .

Разумеется, вид производящей функции $\alpha(\mu, \eta)$ изменяется при переходе к иным граничным условиям или другой геометрии области в плоскости (μ, η) . Конкретные проблемы построения производящей функции обсуждаются в следующих

разделах. Далее будут даны и конкретные примеры двумерных ориентационных полей и переходов Фредерикса.

Подводя итог общему анализу исходного уравнения изгибных деформаций (6), отметим, что задача его решения не сводится просто к введению удобных криволинейных координат. Необходимым моментом теории является доказательство обращения в нуль неоднородной правой части в нем.

ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ С ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Построение производящих угловых функций $\alpha(\mu, \eta)$ требует решения граничной задачи для нелинейного двумерного уравнения синус-Гельмгольца (14) или (15). Такая проблема пока никем не рассмотрена, хотя в настоящее время для этого уже есть некоторые возможности. Мы начнем с самого простого случая, когда производящая функция оказывается одномерной $\alpha = \alpha(\mu)$ или $\alpha = \alpha(\eta)$. Тогда и уравнения (14), (15) принимают более простую форму обыкновенного дифференциального уравнения, скажем для функций $\alpha(\mu)$ или $\beta(\mu)$

$$\mu_x^2 \frac{\partial^2(2\alpha)}{\partial\mu^2} - \sin 2\alpha = 0, \quad \mu_x^2 \frac{\partial^2(2\beta)}{\partial\mu^2} + \sin 2\beta = 0. \quad (18)$$

Аналогичными уравнениями (с заменой μ на η) определяются функции $\alpha(\eta)$ или $\beta(\eta)$. Сведение задачи к одномерной в плоскости (μ, η) оказывается возможным, когда в реальном пространстве криволинейная область S_μ образована эквипотенциальными границами $\mu(x, y) = \text{const}$ или силовыми линиями $\eta(x, y) = \text{const}$ (рис. 1 - 3). В первом случае речь идет, в частности, о криволинейных поверхностях, образованных "мягким" магнитным материалом, либо просто совпадающими с указанными линиями. Тогда в плоскости (μ, η) имеем область S_μ в виде полуплоскости или полосы $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ или $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Вдоль этих границ должны быть заданы постоянные значения угла α :

$$\begin{aligned} \alpha(\mu_1) &= \alpha_1, \quad \alpha(\mu_2) = \alpha_2 \quad \text{или} \\ \alpha(\eta_1) &= \alpha_1, \quad \alpha(\eta_2) = \alpha_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Без этого невозможно одномерное решение $\alpha(\mu)$ или $\alpha(\eta)$. Стоит отметить, что подобные условия являются наиболее типичными для взаимодействия НЖК с твердой стенкой.

Вектор магнитного поля, по определению, ортогонален эквипотенциалам и направлен вдоль силовых линий. Так что в случае полосы $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ имеем дело с однородным поперечным (к слову) полем, а во втором случае оно направлено вдоль

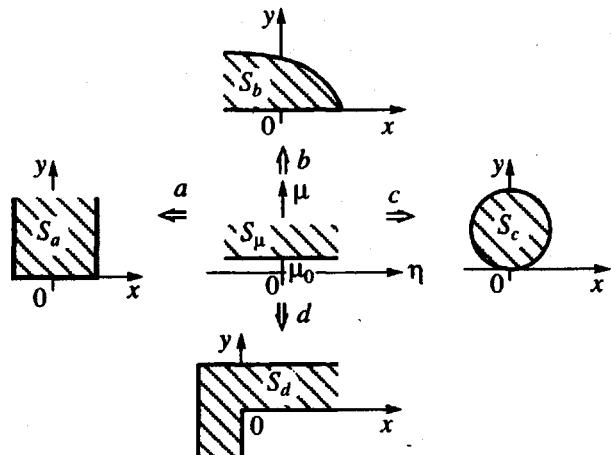


Рис. 1. Примеры реальных конфигураций различных областей S_a, S_b, S_c, S_d (кубет), заполненных жидким кристаллом. В центре их единый прообраз S_μ в плоскости магнитных потенциалов (μ, η) , полученный с помощью соответствующих (a, b, c, d) конформных преобразований (22).

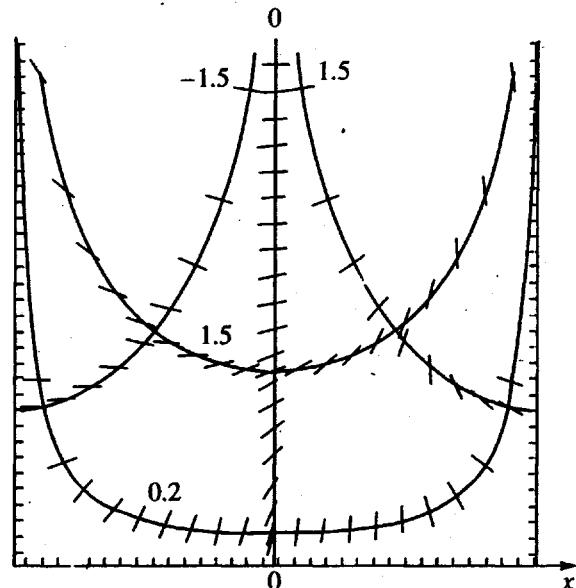


Рис. 2. Область S_a – "пора" с эквипотенциальной границей ($\mu_0 = 0$). Сплошными линиями показаны еще две эквипотенциалы ($\mu_1 = 0.2\mu_x$ и $\mu_2 = 1.5\mu_x$), а также силовые линии $\eta_0 = 0$ и $\eta_{3,4} = \pm 1.5\mu_x$. Цифры на кривых – относительные значения. Штрихи изображают локальные направления ориентаций директора.

слоя. Вектор ориентации \mathbf{l} на границе S_μ образует с вектором \mathbf{H} углы α_1 и α_2 . Разумеется, в пространственных переменных (x, y) полоса или другая область становится криволинейной, а поле \mathbf{H} – пространственно неоднородным (рис. 1 - 3). Однако директор \mathbf{l} на границе S_μ образует с вектором \mathbf{H} те же углы α_1 и α_2 , что и на границе S_μ . Следует

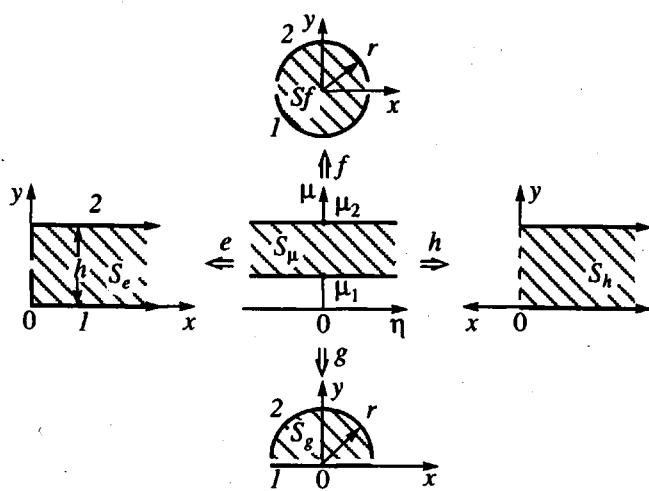


Рис. 3. Примеры областей S_e , S_f , S_g , S_h (ЖК-ячейка) с разными значениями потенциалов μ_1 и μ_2 на обкладках 1 и 2. В центре их приведенный образ – плоскопараллельный слой, полученный с помощью преобразований (34).

помнить, что и в реальной области S_z вектор \mathbf{H} совпадает с нормалью к границе $\mu = \text{const}$ и направлен вдоль границы $\eta = \text{const}$.

Границы, несущие одно значение магнитного потенциала

Наиболее простой вид производящая функция $\alpha(\mu)$ или $\alpha(\eta)$ имеет в случае тех реальных областей S_z , которые конформно преобразуются в полуплоскость, скажем $\mu \geq \mu_0$ или $\eta \geq \eta_0$. Ясно, что на границе S_z должно быть задано одно постоянное значение потенциала μ_0 (или η_0), хотя ее геометрия может быть криволинейной и достаточно общей. На рис. 1 показаны примеры таких областей S_a , S_b , S_c , S_d .

Формально не может быть отдано предпочтения какому-либо из двух потенциалов μ или η , хотя более реален случай, когда граница S_z является эквипотенциалю ($\mu = \text{const}$), т.е. образована поверхностью мягкого магнитного материала. Будем иметь в виду далее именно этот случай.

Обратимся к граничным условиям вида (19), согласующимся с одномерностью задачи в плоскости (μ, η) . На бесконечности ($\mu \rightarrow \infty$), где роль границы исчезает, очевидно $\mathbf{H} \parallel \mathbf{l}$, т.е. $\alpha(\infty) = 0$. Если и на самой границе $\alpha(\mu_0) = 0$, то придем к тривиальному решению уравнения (18), т.е. $\alpha(\mu) = 0$, $\mathbf{H} \parallel \mathbf{l}$. Отметим, что оно имеет нетривиальный смысл, когда рассматриваются криволинейные области S_a , S_b , S_c , S_d и подобные им. Поскольку относительный угол α инвариантен при конформном отображении, локальное условие $\mathbf{H} \parallel \mathbf{l}$ имеет место и в неоднородном магнитном поле. Это значит, что при нулевом граничном условии

$\alpha(\mu_0) = 0$ векторные линии поля \mathbf{l} повторяют ход криволинейных векторных линий поля \mathbf{H} в областях типа S_a , S_b , S_c , S_d . Это строгое следствие теории заранее не очевидно.

Нетривиальное решение уравнения (18) возникает в полу平面, когда на ее границе ориентация \mathbf{l} отлична от ориентации магнитного поля. Не теряя общности, можно рассмотреть наибольшую разориентацию. Запишем граничные условия вместе с первым интегралом уравнения (18)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} = \pm v^{-1} \sqrt{1 + v^2 \sin^2 \alpha}, \quad (20)$$

$$\alpha(\mu_0) = \pi/2, \quad \alpha(\infty) = 0.$$

Решение уравнения (18), удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет вид

$$\cos \alpha \equiv \sin \beta = \pm \operatorname{th} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_x}, \quad (21)$$

$$\alpha + \beta = \pi/2, \quad v = 1.$$

Разные знаки предусматривают возможность закрутки β в разные стороны. Для удобства пользования приведенной формулой она дана в двойном представлении – через угол α и дополнительный к нему β . Эта простая формула позволяет вычислить ориентационные поля $\alpha(x, y)$ или $\beta(x, y)$, порождаемые различными магнитными полями (в областях S_z), сопряженные потенциалы которых $\mu(x, y)$, $\eta(x, y)$ конформно преобразуют криволинейную область S_z в полу平面 $\mu \geq \mu_0$. На криволинейной границе области S_z заданы те же граничные условия, что и на границе этой полу平面, именно, одно постоянное значение потенциала μ_0 и значения углов (согласно выражению (20)).

На рис. 1 показаны примеры областей S_z . Конформные преобразования, переводящие эти области (S_a , S_b , S_c , S_d) в полу平面 (в центре рисунка) имеют вид

$$(a) \quad \eta + i\mu = \mu_0 \sin(x + iy) \\ (b) \quad \eta + i\mu = \mu_0 \sin \sqrt{x + iy} \\ (c) \quad \eta + i\mu = 2\mu_0 r(x + iy)^{-1} \quad (22)$$

Громоздкую формулу для случая α можно найти в литературе [12]. Буквы в круглых скобках соответствуют обозначению на рисунке. Так, (a) означает переход к полу平面 в (μ, η) от области S_a в форме прямоугольной поры в магнитном материале. Разделяя в (a) действительную и мнимые части, находим явные формулы для магнитных потенциалов в S_a

$$\mu(x, y) = \mu_x \cos x \operatorname{sh} y, \\ \eta(x, y) = \mu_x \sin x \operatorname{ch} y. \quad (23)$$

Отметим, что положив в первой формуле слева $\mu = \mu_0$, получим уравнение границы области S_a .

Перейдем теперь к вычислению ориентационного поля. Для этого подставим первую формулу из выражения (23) в уравнение (21). В результате

$$\cos \alpha(x, y) \equiv \sin \beta(x, y) = \pm \operatorname{th} \left[\frac{\mu_0}{\mu_x} (\cos x \operatorname{sh} y - 1) \right]. \quad (24)$$

На рис. 2 показаны две эквипотенциали $\mu = 0.2\mu_x$ и $\mu = 1.5\mu_x$, а также две силовые линии $\eta = \pm 1.5\mu_x$ и $\eta = 0$. При этом сама граница "поры" соответствует эквипотенциали $\mu = \mu_0 = 0$. В различных точках линий показаны штрихами локальные ориентации I. Углы наклона штрихов вычислены по формулам (24) и (16). Легко усматриваются две особенности ориентационного поля. Первая – беспереходовый характер деформации, они существуют уже при самых малых магнитных полях. Вторая – отсутствие углового градиента вдоль эквипотенциалей. Можно видеть на рис. 2 одинаковый наклон штрихов к направлению линий $\mu = \mu_1 - \text{const}$, что строго следует из одномерности решения, поскольку $\alpha(\mu_1) = \text{const}$. Значительное уклонение I от локального направления силовой линии (т.е. от направления H) имеет место вблизи границы, особенно у дна "поры" – концевой эффект.

Аналогично для перехода к круговой области S_b на рис. 1 имеем, согласно выражению (22), следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mu &= 2\mu_0 ry / (x^2 + y^2), \\ \eta &= -2\mu_0 rx / (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Как и выше, приняв в первом выражении $\mu = \mu_0$, приходим к уравнению границы круговой области S_b радиуса r , несущей на границе потенциал μ_0 . Используя первую формулу в уравнениях (21), получим ориентационное поле в круге S_b

$$\begin{aligned} \cos \alpha(x, y) \equiv \sin \beta(x, y) &= \\ &= \pm \operatorname{th} \left[\frac{\mu_0}{\mu_x} \left(\frac{2ry}{x^2 + y^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Разумеется, для вычисления абсолютных углов (ϕ и ψ) ориентации векторов I и H нужно использовать формулы (23), (24) и (25), (26) в соотношениях (16), (17).

Полагая, что метод расчета ориентационных полей показан, не будем рассматривать более громоздкие формулы для областей S_c и S_d , которые далеко не исчерпывают всех возможных примеров.

Границы, несущие два значения потенциала. Беспереходовые деформации

Рассмотрим более сложные случаи, когда на границе S_z задано два значения потенциала μ_1 и μ_2 на разных ее участках. Область S_μ – это полоса

$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, имеющая две плоскопараллельные границы. Как и в предыдущем разделе, в плоскости (μ, η) магнитное поле однородно и направлено перпендикулярно границам. На рис. 3 показана область S_μ и соответствующие ей образцы S_z . Разумеется, здесь магнитное поле неоднородно. Места нестыковки участков границы с разными потенциалами отмечены короткими пропусками в ее линии.

Производящая функция $\alpha(\mu)$, как и в предыдущем разделе, ищется как решение одномерного уравнения (18), но уже при условиях ориентации на двух границах слоя (19), где α_1, α_2 – константы. В отличие от предыдущего раздела возможны оба случая, именно $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$. В этом разделе рассмотрим первый случай, $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$. Не теряя общности, можно положить

$$\alpha(\mu_1) = \pi/2, \quad \alpha(\mu_2) = 0. \quad (27)$$

Поскольку в плоскости (μ, η) магнитное поле ортогонально слою, эти условия значат, что ориентация на границе $\mu = \mu_1$ также ортогональна ей, а на границе $\mu = \mu_2$ вектор I параллелен ей. Следовательно, своеобразие граничных условий состоит в предварительной закрутке, обусловленной границами, а магнитное поле вносит дополнительный эффект. Полное поле $\alpha(\mu)$ описывается следующим решением уравнения (18):

$$\cos \alpha \equiv \sin \beta = \pm \operatorname{sn} \left[\frac{\mu - \mu_1}{\mu_x v} \right]. \quad (28)$$

Здесь sn – эллиптический синус Якоби. Решение (28), как и (21), получается непосредственно из первого интеграла (20), но оно удовлетворяет более общим граничным условиям (27) и сводится в пределе ($v \rightarrow 1$) к выражению (21).

Поскольку при $\mu = \mu_1$ аргумент эллиптического синуса и сама эта функция обращаются в нуль, первое граничное условие в уравнении (27) удовлетворяется. На второй границе необходимо принять для аргумента синуса соотношение

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_x v} = K(v), \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (29)$$

Здесь $K(v)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, v – его модуль. Это фактически константа интегрирования, значение которой определяется соотношением (29). Тогда определится и значение самого интеграла. Эллиптический синус обращается в единицу, когда его аргумент равен $K(v)$ [13]. Поэтому формула (29) – это то соотношение, при котором выполняется второе граничное условие в выражении (27). Величина $K(v)$ играет роль четверти периода для эллиптического синуса. С учетом уравнения (29) решение (28) перепишется в виде

$$\cos \alpha \equiv \sin \beta = \pm \operatorname{sn} \left[\frac{\mu - \mu_1}{\Delta \mu} K(v) \right]. \quad (30)$$

Равенство (29) выполняется не безусловно, а лишь при определенных значениях величины v , поэтому его нужно рассматривать как условие существования решения уравнения (18), удовлетворяющего поставленным граничным условиям (27). Перепишем его несколько иначе, вводя также обозначение $\Delta\mu$ для разности потенциалов на границах слоя, именно

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_x} = v K(v), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad \Delta\mu = |\mu_2 - \mu_1|. \quad (31)$$

Интеграл $K(v)$ является монотонно растущей функцией, такой, что

$$K(0) = \pi/2, \quad K(1) \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Ясно, что выражение (31) имеет решения при любых значениях относительной разности потенциалов $\Delta\mu/\mu_x^{-1}$, не исключая в принципе и нулевого значения, при котором, как видно из уравнения (31), $v = 0$. Тогда эллиптический синус переходит в круговой

$$\operatorname{sn}\left[\frac{\mu - \mu_1}{\Delta\mu} K(v)\right] \approx \sin\left(\frac{\mu - \mu_1}{\Delta\mu} \frac{\pi}{2}\right), \quad (\Delta\mu \ll \mu_x). \quad (33)$$

Отождествляя это выражение с $\sin\beta$, согласно формуле (30), получим

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \equiv \beta \approx \frac{\mu - \mu_1}{\Delta\mu} \frac{\pi}{2}, \quad (\Delta\mu \ll \mu_x). \quad (33)$$

Мы пришли к выражению, близкому к формуле для угла начальной закрутки, которую можно получить и прямо из уравнения (18), удерживая в нем лишь первый член.

Итак, формула для производящей функции, которая позволяет перейти к ориентационным полям $\alpha(x, y)$ или $\beta(x, y)$ в областях S_z имеет вид (30). Их криволинейные границы состоят из двух участков, несущих потенциалы μ_1 и μ_2 , и трансформируются в полосу $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ с помощью конформных преобразований вида $x + iy \rightarrow \eta(x, y) + i\mu(x, y)$, где $\eta(x, y)$, $\mu(x, y)$ есть решение соответствующей магнитной задачи. На рис. 3 показаны примеры таких областей (S_e , S_f , S_g , S_h), для которых конформные преобразования даются соответствующими формулами

$$(e) \quad \eta + i\mu = \frac{2\mu_2}{\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi z}{h}, \quad z = x + iy, \quad \mu = 0$$

$$(f) \quad \eta + i\mu = \frac{2\mu_0}{\pi} \ln \frac{h-z}{h+z},$$

$$\mu_2 = +\mu_0, \quad \mu_1 = -\mu_0 \quad (34)$$

$$(g) \quad \eta + i\mu = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{z-r}{z+r},$$

$$\mu_2 = \mu_0, \quad \mu_1 = \mu_0 \pi^{-1} \operatorname{arctg} r.$$

Громоздкую формулу в случае h можно найти в работе [12].

Как и в предыдущем разделе, отметим, что положив в первой формуле сначала $\mu = \mu_2$, а затем $\mu = \mu_1$, получим уравнения двух участков границ. Они обозначены на рис. 3 цифрами 1 и 2 у их контуров. Так, из выражения (34e) получаются для области S_e ("поры" с щелью в донышке) формулы для магнитных потенциалов

$$\mu = \frac{\mu_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi x}{h} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{h} \right), \quad (35)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi x}{h} - \sin^2 \frac{\pi y}{h} \right).$$

Подставляя первую формулу из выражения (34) в уравнения (30) и учитывая, что $\mu_1 = 0$, получим ориентационное поле в области S_a

$$\cos \alpha(x, y) \equiv \sin \beta(x, y) = \pm \operatorname{sn} \left[\frac{K(v)}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi x}{h} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{h} \right) \right]. \quad (36)$$

Аналогичным образом раскрывая явный вид магнитных потенциалов на основании остальных формул (34) и подставляя выражения для $\mu(x, y)$ в выражение (30), а затем и в уравнение (16), получим ориентационные поля в областях S_f , S_g , S_h .

Следует отметить, что если провести эту процедуру с предельной формулой (33), то она дает первоначальное ориентационное поле в этих же областях – до "включения" магнитного поля.

Переходы Фредерикса в криволинейных ячейках и неоднородных магнитных полях

Рассмотрим теперь случай, когда на участках границы, несущих разные потенциалы μ_1 , μ_2 (как в S_z , так и S_μ), заданы одинаковые ориентации, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$ в условиях (19). Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, т.е. на всей границе направления векторов I и H совпадают с нормалью к границе n , то в плоскости (μ, η) в плоскопараллельном слое $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ уравнение (18) дает тривиальное решение $\alpha(\mu) = 0$. Оно означает, что не только на границах, но и во всех точках области S_μ выполняется условие $I \parallel H$. При переходе к криволинейной области S_z в силу свойств конформных преобразований данное условие выполняется и для всех точек S_z , хотя поля I и H в пределах S_z неоднородны. Это также означает, что векторные линии обоих полей совпадают, если на границе $I \parallel H$ и $H \perp n$ (нормали к границе). Несмотря на не вполне очевидный характер такого совпадения, это строгое следствие теории. Его можно показать и формально, подставив тривиальное решение $\alpha(\mu) = 0$ в формулу (16), определяющую угол ϕ ориентации директора в плоскости (x, y) . Она будет следующей:

$$\Phi_0(x, y) = \psi(x, y), \quad \alpha(\mu) = 0, \quad (37)$$

где ψ – угол ориентации вектора H .

Таким образом, тривиальное решение существует как в прямолинейной, так и криволинейной геометрии.

Для дальнейшего существенно рассмотреть еще одно вырожденное решение уравнения (18), которое будем называть трансверсальным. Оно возникает при соответствующих условиях на границах (планарной ориентации ($\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$) на эквипотенциальных границах) и имеет вид

$$\alpha(\mu) = \pi/2. \quad (38)$$

Тогда поле директора (16)

$$\varphi_{\perp}(x, y) = \frac{\pi}{2} + \psi(x, y). \quad (39)$$

Значок \perp связан с условием $I \perp H$ в каждой точке (x, y) . Ясно, что векторные линии поля I совпадают с эквипотенциальными магнитного поля. Аналог этого решения $\varphi_{\perp} = \pi/2$ также известен в элементарной теории переходов Фредерикса в плоскопараллельных ячейках и однородных магнитных полях. Оно отличается от решения (37) более высокой энергией НЖК в магнитном поле, поскольку предусматривает его метастабильное равновесие при условии $H \perp I$.

Оба эти решения φ_0 и φ_{\perp} имеют принципиальное значение для понимания и трактовки переходов Фредерикса в криволинейных областях и неоднородных магнитных полях.

Основная задача этого раздела – построить в плоскости (μ, η) производящую функцию $\alpha(\mu)$ для плоскопараллельного слоя $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ с граничными условиями $\alpha_1 = \alpha_2$ и перейти в плоскость (x, y) в криволинейную область S_z с помощью преобразования $\eta + i\mu \rightarrow x + iy$. Одно такое нетривиальное решение (28) было уже рассмотрено. Однако оно предусматривало предварительную закрутку ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), т.е. ориентационное поле с топологическим зарядом. Поэтому выражение (28) не годится для нашего случая ($\alpha_1 = \alpha_2$), когда внутренняя топология ориентационного поля тривиальна. Подходящее решение, которое получается интегрированием уравнения (20), но с другими константами интегрирования, имеет вид

$$\cos \alpha \equiv \sin \beta = \pm v \operatorname{sn} \frac{\mu - \mu_1}{\mu_x}, \quad (40)$$

$$0 \leq v \leq 1.$$

Здесь, в отличие от выражения (28), модуль v (константа интегрирования) входит в формулу иначе. Запишем теперь в конкретном виде граничные условия. Как это принято в классической теории Фредерикса [3, 14], рассмотрим наибольшую разориентацию векторов I и H на обеих границах

$$\alpha(\mu_1) = \pi/2, \quad \alpha(\mu_2) = \pi/2. \quad (41)$$

Поскольку вектор H ортогонален границе, эти условия описывают планарную ориентацию директора.

Как уже отмечено, вырожденное трансверсальное решение (38) уравнения (18) удовлетворяет этим условиям. Однако нелинейное уравнение (18) имеет множество нетривиальных решений, удовлетворяющих этим же условиям (39), и мы их рассмотрим.

Решение (40) удовлетворяет условию на одной границе, так как аргумент эллиптического синуса обращается в нуль. Чтобы удовлетворить второму условию в выражении (38), нужно потребовать, чтобы его аргумент был кратен величине $2K(v)$, играющей роль величины π для эллиптического синуса, т.е.

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_x} = 2nK(v), \quad |n| = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

Формальный смысл этого условия прост: чтобы существовало решение (40), удовлетворяющее условиям (41), нужно, чтобы в промежутке $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ укладывалось целое число полуволн эллиптического синуса. Решения с $|n| > 1$ соответствуют высокоградиентным полям директора. Наименьшей упругой энергией обладает закрученное состояние с $|n| = 1$. Его обычно и рассматривают. Подставляя выражение (42) при $|n| = 1$ в уравнение (40), получим в окончательном виде производящую функцию

$$\cos \alpha \equiv \sin \beta = \pm v \operatorname{sn} \left[2 \frac{\mu - \mu_1}{\Delta \mu} K(v) \right]. \quad (43)$$

Условие (42) позволяет, вообще говоря, найти константу v . Однако это возможно не всегда. В силу свойств полного эллиптического интеграла, согласно выражению (32), имеем $K(v) \geq \pi/2$. Вносится это неравенство в уравнение (40), получим (при $|n| = 1$) условие, при котором возникает нетривиальное решение (43), т.е.

$$\begin{aligned} \Delta \mu &\geq \Delta \mu_n, \quad \Delta \mu = |\mu_2 - \mu_1|, \\ \Delta \mu_n &= \pi \mu_x = \pi \sqrt{k/\chi_a}. \end{aligned} \quad (44)$$

Мы пришли к критерию Фредерикса в обобщенных переменных. Если магнитное поле однородно ($H = H_0$) не только в плоскости μ, η (что верно по его определению), но и в плоскости (x, y) , а S_z – это плоскопараллельный слой $0 \leq y \leq h$, то $\Delta \mu = hH_0$ и выражение (44) сводится к соотношению, которое впервые получил сам В.К. Фредерикс [3].

Нетривиальный смысл обобщенного критерия (44) состоит в том, что он определяет пороговый переход от вырожденного (трансверсального) решения (38) к решению (43), т.е. от одного

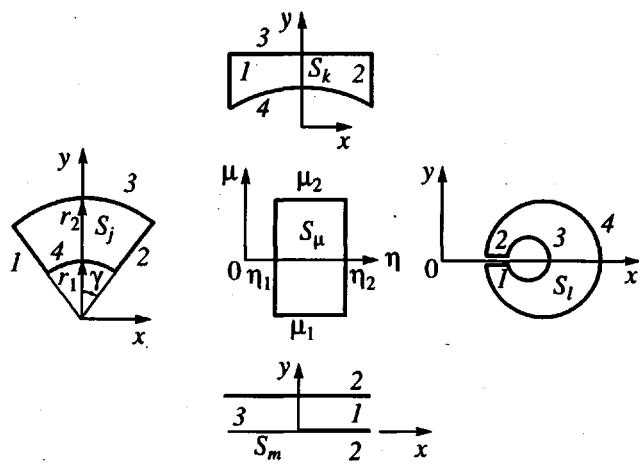


Рис. 4. Примеры областей S_j , S_k , S_l , S_m и их образ S_μ . Участки границ 1, 2 и 3, 4 несут потенциалы μ_1 , μ_2 и η_1 , η_2 , соответственно.

неоднородного поля директора (39) к другому неоднородному полю, а именно

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = \\ = v \arccos \operatorname{sn} \left[2 \frac{\mu(x, y) - \mu_1}{\Delta \mu} K(v) \right] + \psi(x, y). \end{aligned} \quad (45)$$

Этот строгий результат трудно было предвидеть заранее. Более того, существует широко распространенное мнение, что пороговый эффект Фредерикса при граничных условиях (41) возможен лишь в однородном магнитном поле. Тем не менее обобщенный переход обладает общими чертами с элементарным в том смысле, что он является однопараметрическим – определяется одним значением модуля v и потенциала $\Delta \mu$. В точке $\Delta \mu = \Delta \mu_n$ существуют два решения (38) и (43) и происходит переход от первого ко второму. В областях более сложной геометрии, о которых будет речь далее, порогом уже является не точка, а линия.

Как и в предыдущих разделах при переходе от одной области S_z к другой, пользуемся для расчета поля директора универсальной зависимостью (43) и далее (45), в которой нужно раскрыть вид функции $\mu(x, y)$. Последняя, конечно, меняется от области к области.

Все задачи, рассмотренные выше, были связанны с производящей функцией $\alpha(\mu)$, зависящей лишь от магнитного потенциала μ , поэтому мы говорили об эквипотенциальных границах. Все результаты могут быть переписаны с заменой μ на η . Тогда области S_μ заменяются на полуплоскости $\eta_1 \leq \eta$, $\eta_1 \geq \eta$ и полосу $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Существенно, что границами областей S_z будут тогда силовые линии $\eta_1(x, y) = \text{const}$ (или) $\eta_2(x, y) = \text{const}$. Поэтому вектор магнитного поля направлен вдоль границы, а условие вида (41) означает гомеотроп-

ную, а не планарную ориентацию директора. Примером может служить кювета в виде двух коаксиальных цилиндров (с НЖК между ними), по общей оси которых протекает линейный ток. Вводя разрез этой кольцевой области по одному из радиусов, получим область в квазипотенциальном магнитном поле, границы которой совпадают с силовыми линиями $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$.

НЕПРИВОДИМЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Рассмотрим теперь значительно более сложную задачу об ориентационных деформациях в таких областях S_z , которые при переходе в плоскость (μ, η) трансформируются в замкнутые области S_μ в виде прямоугольника

$$\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2. \quad (46)$$

Теперь и в плоскости (μ, η) приходится иметь дело с двумерными эффектами. Разумеется, это снимает ряд ограничений и на реальные области S_z , которые могут иметь не только более сложную геометрию, но и границы, одни участки которых несут потенциалы μ_1 , μ_2 , а другие – потенциалы η_1 и η_2 . Примером такой ячейки может служить сектор круговой области S_j , заключенный между коаксиальными цилиндрами (рис. 4). Круговые участки границ могут совпадать с силовыми линиями с заданными потенциалами (η_1 , η_2) на них. Радиальные же участки тогда совпадают с эквипотенциалами и на них заданы потенциалы μ_1 , μ_2 . Будут рассмотрены и другие примеры.

Принципиальной особенностью таких деформаций является зависимость порога Фредерикса от двумерной геометрии области и двупараметрический характер перехода. Критерий (44), несмотря на двумерные поля $I(x, y)$ и $H(x, y)$, все равно оставался, как и классический, однопараметрическим с одной точки бифуркации.

Разделение переменных для уравнения синус-Гельмгольца

Для решения таких неприводимых задач нужно строить производящую функцию $\alpha(\mu, \eta)$, удовлетворяющую двумерному уравнению синус-Гельмгольца (14) или (15). Для него в работах [10, 11] предложен метод разделения переменных, развитый в работе [15] для близкого по структуре волнового уравнения синус-Гордона. Решение ищется в той же форме, т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \alpha(\eta)/\alpha(\mu). \quad (47)$$

Подставляя в уравнение (14) это выражение, приходим после ряда выкладок [10, 11] к двум

обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\begin{aligned} (\alpha'_\eta)^2 &= a^2 \alpha^4(\eta) + b^2 \alpha^2(\eta) + c^2, \\ \alpha'_\eta &= \partial \alpha(\eta) / \partial \eta, \\ (\alpha'_\mu)^2 &= a^2 \alpha^4(\mu) + (1 - b^2) \alpha^2(\mu) + c^2, \\ \alpha'_\mu &= \partial \alpha(\mu) / \partial \mu. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь a, b, c – константы интегрирования.

Вместо выражения (47) можно исходить из произведения

$$\operatorname{tg} \alpha/2 = \alpha(\eta) \alpha^{-1}(\mu), \quad (49)$$

рассматривая $\alpha^{-1}(\mu)$ как новую функцию. Тогда второе уравнение в формуле (48) примет относительно $\alpha^{-1}(\mu)$ аналогичную форму, что легко достигается прямой подстановкой $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$. Иногда удобнее пользоваться представлением (49) вместо того, чтобы искать формулы преобразования $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ для решения, выраждающегося через неэлементарные функции.

Для дополнительного угла β , подставив формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\beta(\mu, \eta)}{2} = \beta_\eta / \beta_\mu, \quad \beta_\eta \equiv \beta(\eta), \quad \beta_\mu \equiv \beta(\mu). \quad (50)$$

В выражение (15), получим вместо (48) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (\beta'_\eta)^2 &= a^2 (\beta_\eta^2 + A_\eta) (\beta_\eta^2 + C_\eta), \\ (\beta'_\mu)^2 &= a^2 (\beta_\mu^2 + A_\mu) (\beta_\mu^2 + C_\mu). \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь из соображений дальнейшего удобства иначе введены постоянные $a^2, A_\eta, A_\mu, C_\eta, C_\mu$ в правых частях уравнений. Из пяти коэффициентов лишь три независимые. Поэтому они подчиняются двум соотношениям

$$\begin{aligned} A_\eta C_\eta &= A_\mu C_\mu, \\ a^2 (A_\eta + C_\eta) + a^2 (A_\mu + C_\mu) &= 1. \end{aligned} \quad (52)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (48), (51) и модифицированные, получающиеся при замене $\beta(\eta)$ и $\beta(\mu)$ на $\beta^{-1}(\eta)$, $\beta^{-1}(\mu)$ имеют решения в эллиптических функциях, которые переходят в тригонометрические при некоторых условиях.

Ясно, что метод разделения переменных дает некоторый набор частных решений $\alpha(\mu, \eta)$ или $\beta(\mu, \eta)$. Однако их значение не следует недооценивать, поскольку при нашем подходе одно решение $\alpha(\mu, \eta)$ порождает целый класс пространственных полей $\alpha[\mu(x, y), \eta(x, y)]$, многие из которых могут быть практически весьма полезны.

Переходы Фредерикса в замкнутых областях

Рассмотрим на ряде примеров особенности истинно двумерных деформаций, которые никаким преобразованием не могут быть сведены к одномерным. В этом разделе ограничимся случаями пороговых эффектов, когда ниже порога поле директора трансверсально магнитному ($I \perp H$) в каждой точке (x, y) . Как уже было показано, это возможно, если условие $I \perp H$ ($\beta = 0$) задано на границе. Теперь в плоскости (μ, η) будем рассматривать двумерную производящую функцию $\alpha(\mu, \eta)$ или $\beta(\mu, \eta)$, решая уравнение синус-Гельмгольца (14) или (15) для прямоугольника $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ с условиями

$$\beta(\mu_1) = \beta(\mu_2) = \beta(\eta_1) = \beta(\eta_2) = 0. \quad (53)$$

Решение будем искать в виде (50), интегрируя обыкновенные дифференциальные уравнения (51). Это не так просто, как в одномерном случае, поскольку они более высокой степени по β и содержат больше констант, требующих согласования между собой. Поэтому основные этапы процедуры будут изложены.

Подходящие решения $\beta_\eta = \beta(\eta)$ и $\beta_\mu = \beta(\mu)$ можно построить, выбирая знаки в круглых скобках в выражениях (51) и значения самих коэффициентов. Вначале записываем решение уравнения (51) в виде квадратур

$$\begin{aligned} \frac{\eta - \eta_0}{\mu_x} a &= \int_0^{\beta_\mu} \frac{d\beta}{\sqrt{(A_\eta - \beta^2)(C_\eta - \beta^2)}}, \\ \frac{\mu - \mu_0}{\mu_x} a &= \int_{\beta_\mu}^{\infty} \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta^2 - A_\mu)(\beta^2 - C_\mu)}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь коэффициенты $A_\eta, C_\eta, A_\mu, C_\mu$ – положительные величины. Обращаем внимание на несколько различающиеся подкоренные выражения. Интегралы в таком виде содержатся в таблице эллиптических интегралов, например в работе [13]. Их выражение через стандартный эллиптический интеграл $F(\chi, v)$ позволяет записать решения уравнений (51) в виде

$$\frac{\eta - \eta_0}{\mu_x} a \sqrt{C_\eta} = F(\chi_\eta, v_\eta), \quad (55)$$

$$v_\eta^2 = A_\eta / C_\eta, \quad \sin \chi_\eta = \frac{\beta_\eta}{\sqrt{A_\eta}},$$

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_x} a \sqrt{C_\mu} = F(\chi_\mu, v_\mu), \quad (56)$$

$$v_\mu^2 = A_\mu / C_\mu, \quad \sin \chi_\mu = \frac{\beta_\mu}{\sqrt{A_\mu}}.$$

Полагая в выражениях (54) $\beta_\eta = \pi/2$, $\eta = \eta_m$ и $\beta_\mu = 0$, $\mu = \mu_m$, получим из уравнений (55), (56) полезные соотношения, связывающие константы

$$\begin{aligned} \frac{\eta_m - \eta_0}{\mu_x} a \sqrt{C_\eta} &= K(v_\eta), \\ \frac{\mu_m - \mu_0}{\mu_x} a \sqrt{C_\mu} &= K(v_\mu), \end{aligned} \quad (57)$$

где по определению полного эллиптического интеграла положено

$$K(v) = F\left(\frac{\pi}{2}, v\right).$$

Согласно формулам обращения эллиптических интегралов [13], имеем из выражений (55), (56)

$$\beta_\eta \equiv \beta(\eta) = \sqrt{C_\eta} v_\eta \operatorname{sn}\left[\frac{\eta - \eta_0}{\eta_m - \eta_0} K(v_\eta)\right] \quad (58)$$

$$\beta_\mu \equiv \beta(\mu) = \sqrt{C_\mu} \operatorname{sn}\left[\frac{\mu - \mu_0}{\mu_m - \mu_0} K(v_\mu)\right]. \quad (59)$$

Отсюда решение (50) двумерного уравнения синус-Гельмгольца (15) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta(\mu, \eta)}{2} &= \frac{\beta_\eta}{\beta_\mu} = \sqrt{C_\eta/C_\mu} v_\eta \times \\ &\times \operatorname{sn}\left[\frac{\eta - \eta_0}{\eta_m - \eta_0} K(v_\eta)\right] \operatorname{sn}\left[\frac{\mu - \mu_0}{\mu_m - \mu_0} K(v_\mu)\right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Все фигурирующие здесь константы (C_η/C_μ , v_η , v_μ , η_0 , η_m , μ_0 , μ_m) уточняются на основании граничных условий и соотношений (52), (57). Положив

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \eta_1, \quad \eta_m = \frac{1}{2} \Delta\eta, \quad \Delta\eta = |\eta_2 - \eta_1| \\ \mu_0 &= \mu_1, \quad \mu_m = \frac{1}{2} \Delta\mu, \quad \Delta\mu = |\mu_2 - \mu_1|, \end{aligned} \quad (61)$$

приходим в уравнении (60) к нулевым граничным условиям (53) в силу свойств эллиптических синусов. Далее из первого соотношения в (52) и определения модулей v_η , v_μ в выражениях (55), (56), находим

$$C_\eta/C_\mu = \sqrt{(A_\mu/C_\mu)(A_\eta/C_\eta)} = v_\mu/v_\eta. \quad (62)$$

Используя теперь формулу (57) и определение разностей потенциалов $\Delta\eta$ и $\Delta\mu$, получим для этой же величины

$$C_\eta/C_\mu = a^2 C_\eta/a^2 C_\mu = \Delta\mu^2 K^2(v_\eta)/\Delta\eta^2 K^2(v_\mu).$$

Сопоставляя это с выражением (62) приходим к уравнению связи между v_η и v_μ

$$\Delta\eta^{-2} v_\eta K^2(v_\eta) = \Delta\mu^{-2} v_\mu K^2(v_\mu). \quad (63)$$

Преобразуя второе соотношение в формуле (52), получим, используя те же формулы, еще одно уравнение для v_η , v_μ

$$\begin{aligned} \Delta\eta^{-2} (v_\eta^2 + 1) K^2(v_\eta) + \\ + \Delta\mu^{-2} (v_\mu^2 + 1) K^2(v_\mu) = (1/4\mu_x^2). \end{aligned} \quad (64)$$

Теперь можно исключить с помощью формул (61) - (64) неопределенные константы интегрирования и записать решение для прямоугольника в плоскости (μ , η) в окончательном виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\beta(\mu, \eta)}{2} &= \sqrt{v_\mu v_\eta} \times \\ &\times \operatorname{sn}\left[\frac{\eta - \eta_1}{\Delta\eta} 2K(v_\eta)\right] \operatorname{sn}\left[\frac{\mu - \mu_1}{\Delta\mu} 2K(v_\mu)\right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Числа v_μ , v_η находятся из системы двух функциональных уравнений (63), (64).

Для квадрата ($\Delta\eta = \Delta\mu$) легко найти решение (63), имеющее вид $v_\mu = v_\eta = v$. Подставляя его в выражение (64), получим

$$\Delta\mu/\mu_x = 2\sqrt{2}\sqrt{v^2 + 1} K(v). \quad (66)$$

Отсюда находится значение v тем большее, чем больше $\Delta\mu$. Справа имеем функцию, растущую от $\pi/2$ (при $v = 0$) до ∞ (при $v = 1$). Поэтому при $v = 0$ соотношение (66) дает пороговое значение разности потенциалов $\Delta\mu_n$. Корень уравнения (66), т.е. число v , а с ним и решение (65) существует, если только разность потенциалов $\Delta\mu$ достигает и пре-восходит порог $\Delta\mu_n$

$$\Delta\mu \geq \Delta\mu_n, \quad \Delta\mu_n = \sqrt{2}\pi\mu_x. \quad (67)$$

В результате приходим к критерию перехода типа Фредерикса в замкнутом объеме – квадрате в плоскости (μ , η). Сравнивая с формулой (44) для открытого с двух сторон слоя, видим, что пороговое значение здесь выше в $\sqrt{2}$ раз.

Рассмотрим теперь прямоугольник произвольной формы. Из выражения (63) в линейном приближении по v , учитывая, что $K(0) = \frac{\pi}{2}$, получим

$$v_\eta/\Delta\eta^2 = v_\mu/\Delta\mu^2. \quad (68)$$

В квадратичном приближении уравнение (64) примет вид, если выразить v_μ через v_η

$$\Delta\mu^2/\pi^2\mu_x^2 = 1 + \delta^2 + \frac{3}{2}v_\mu^2(1 + \delta^{-2}), \quad (69)$$

$$\delta = \Delta\mu/\Delta\eta.$$

Здесь δ – фактор геометрической анизотропии. Ясно, что при $v_\mu = 0$ правая часть достигает наименьшего значения, которое нужно рассматривать как пороговое значение $\Delta\mu_n$. Тогда приходим к

пороговому критерию для прямоугольника, учитывающему его анизотропию

$$\Delta\mu \geq \Delta\mu_n, \quad \Delta\mu_n = \pi\mu_x \sqrt{1 + \delta^2}, \quad (70)$$

$$\delta = \Delta\mu / \Delta\eta.$$

Интересно, что порог растет с ростом анизотропии δ в сторону оси 0μ . Если $\delta < 1$, то прямоугольник является ограниченным участком тонкого слоя. Если $\delta > 1$, то речь идет о переходе Фредерикса в области типа поры. Существенно, что на самом деле мы имеем дело с двупараметрическим переходом. Действительно, можно разрешить (69) относительно $\Delta\eta$ и в пределе $v \rightarrow 0$ получить выражение для второго порога $\Delta\eta_n$.

Найдем связь между пороговыми значениями $\Delta\mu_n$ и $\Delta\eta_n$. Разрешая (69) относительно $\Delta\mu_n$, получим (при $v_\mu = 0$)

$$\Delta\mu_n = \pi\mu_x / \sqrt{1 - \pi^2\mu_x^2/\Delta\eta_n^2}. \quad (71)$$

Ясно, что $\Delta\mu_n \geq \pi\mu_x$ и нарастает до бесконечности, когда достигает минимума $\Delta\eta_n = \pi\mu_x$. Сказывается влияние боковых границ.

В достаточно узкой поре переход не происходит – ориентационная структура устойчива. Формула (71) обратима, из нее получается аналогичное выражение и для $\Delta\eta_n$. Оба порога, как следует из соотношения (69), при $v_\mu = 0$ связаны уравнением

$$\Delta\mu_n^{-2} + \Delta\eta_n^{-2} = \pi^{-2}\mu_x^{-2}. \quad (72)$$

На плоскости $(\Delta\mu^{-1}, \Delta\eta^{-1})$ это окружность радиуса $1/\pi\mu_x$. Внутренность этого круга является двупараметрической областью существования эффекта Фредерикса, а ее граница – порогом перехода. Ясно, что величина $\pi\mu_x$ есть минимальное значение каждого из порогов

$$\min(\Delta\mu_n) = \min(\Delta\eta_n) = \pi\mu_x. \quad (73)$$

Минимальное значение порога достигается в открытом слое (вдоль оси 0η). При $\Delta\eta \rightarrow \infty$ из выражения (71) получаем $\Delta\mu_n = \pi\mu_x$ и наоборот, $\Delta\eta_n \rightarrow \pi\mu_x$ при $\Delta\mu \rightarrow \infty$, что относится к открытому слою, направленному вдоль оси 0μ .

Принципиальной особенностью полученных пороговых формул является их универсальный характер. Хотя они получены для прямоугольной области S_μ в плоскости (μ, η) , но относятся к любой криволинейной области S_z , удовлетворяющей, как уже говорилось, двум условиям: 1) S_μ и S_z связаны конформными преобразованиями, 2) границы S_μ , как и S_z , несут потенциалы $\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ и граничные значения угла β (53).

В соответствии с развиваемым здесь подходом формулу (65) нужно рассматривать как производящую функцию. Раскрывая в ней зависимости магнитных потенциалов от координат $\mu(x, y), \eta(x, y)$, получим ориентационные поля в области S_z

плоскости (x, y) различной геометрии. На рис. 4 показаны примеры таких областей (S_j, S_k, S_l, S_m).

Преобразования, переводящие прямоугольник в плоскости (μ, η) в области S_j, S_k, S_l, S_m и обратно, имеют вид

$$(j) \quad \eta + i\mu = \mu_x \ln(x + iy),$$

$$(k) \quad \eta + i\mu = \mu_x \ln(x + iy + 1)(x + iy - 1)^{-1}, \quad (74)$$

$$(l) \quad \eta + i\mu = \mu_x \ln \sin [\pi(x + iy)d^{-1}].$$

Для случая S_m не приводим громоздкую формулу.

Рассмотрим для примера преобразование (j). Отделяя действительную и мнимую части, получим выражения для магнитных потенциалов

$$\mu(x, y) = \mu_x \operatorname{arctg}(y/x), \quad \mu_1 = -\mu_2 = \mu_x y,$$

$$\eta(x, y) = \mu_x \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \eta_1 = \mu_x \ln r_1, \quad (75)$$

$$\eta_2 = \mu_x \ln r_2.$$

Эти выражения дают на соответствующе обозначенных участках границы (области S_j) рис. 4 значения потенциала μ_1, μ_2 и η_1, η_2 .

Подставляя формулы (75) в уравнение (65), получим ориентационное поле $\beta(x, y)$ в области S_z из выражения

$$\operatorname{tg} \frac{\beta(x, y)}{2} = \sqrt{v_\mu v_\eta} \operatorname{sn} \left[K(v_\mu) (\gamma^{-1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1) \right] \times$$

$$\times \operatorname{sn} \left[2K(v_\eta) \frac{\ln(x^2 + y^2)r_1^{-2}}{\ln r_2^2 r_1^{-2}} \right]. \quad (76)$$

Переходя далее от относительного угла β к абсолютному углу ϕ (ориентация директора I) согласно выражению (16), окончательно решаем задачу. Аналогичным образом строим поля $\beta(x, y)$ и в остальных случаях.

Существенно то, что мы рассмотрели переходы Фредерикса между двумя неоднородными ориентационными состояниями. Действительно, до перехода в области S_z в силу криволинейной геометрии уже было неоднородное поле директора, совпадающее с магнитным, т.е. $\phi = \psi(x, y)$, согласно формуле (39). За порогом к нему добавляется поле $\beta(x, y)$. Лишь в однородном магнитном поле ($\psi = 0$) получим $\phi = \frac{\pi}{2} - \beta(x, y)$, что имеет место для областей S_z с прямолинейной геометрией (полуплоскость, слой, прямоугольник) при оговоренных выше граничных условиях.

Имеет смысл рассмотреть и этот сравнительно простой случай, поскольку в литературе отсутствует его анализ.

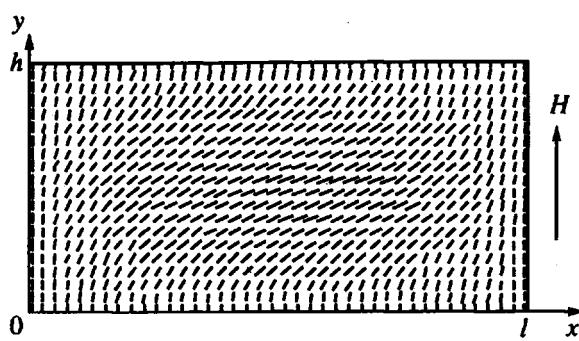


Рис. 5. Поле директора в прямоугольной ячейке в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Штрихи показывают локальное направление директора.

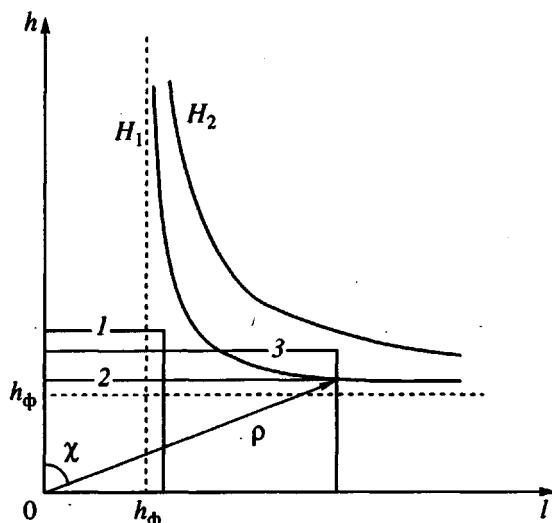


Рис. 6. Бифуркационные границы, соответствующие двум значениям магнитного поля ($H_1 > H_2$). Под кривой область допороговой ориентации директора ($\phi = \pi/2$) при соответствующем значении H . В прямоугольнике 1, полностью погруженном в нее, переходов (при $H = H_1$) нет. Прямоугольник 2 соответствует критическим условиям, а 3 – закритическим для $H = H_1$ и до-критическим для $H = H_2$.

Переход Фредерикса в прямоугольной кювете

Речь идет о плоскопараллельной ЖК-ячейке с боковыми стенками, которую обычно моделируют бесконечным слоем. Пусть боковые стенки – это пластины из немагнитного материала, а обкладки образованы полюсами магнита с наконечниками из “мягкого” железа, т.е. они несут потенциалы (μ , η). Магнитное поле будем считать однородным ($H_x = 0$, $H_y = H$). Поэтому имеем дело с простейшим конформным преобразованием

$$\eta + i\mu = (x + iy)H, \quad \eta = xH, \quad \mu = yH. \quad (77)$$

Поперечные стенки, очевидно, совпадают с силовыми линиями поля H . Вводя размеры ячейки – толщину h и длину l , пишем

$$\Delta\mu = Hh, \quad \Delta\eta = Hl, \quad \mu_1 = 0, \quad \eta_1 = 0. \quad (78)$$

Последние два условия приняты для упрощения дальнейших формул. На всех четырех стенах пусть заданы условия ориентации (53), т.е. $\mathbf{l} \perp \mathbf{H}$. Ясно, что до достижения порога и внутри кюветы будет та же ориентация директора ($\beta = 0$), хотя это видно и из формулы (39), где угол ориентации вектора магнитного поля Ψ , очевидно, должен быть положен равным нулю.

По достижении порога (70) возникает деформация, которая описывается уравнением (65), если раскрыть в ней μ и η , согласно выражению (77), и учесть формулы (78). В результате получим

$$\operatorname{tg} \frac{\beta(x, y)}{2} = \sqrt{v_\mu v_\eta} \operatorname{sn} \left[\frac{x}{l} 2K(v_\eta) \right] \operatorname{sn} \left[\frac{y}{h} 2K(v_\mu) \right]. \quad (79)$$

Числа v_μ и v_η находятся из уравнений (63), (64), хотя вблизи порога можно использовать более простые формулы (68), (69). Отсюда можно найти ориентационное поле директора $\Phi = \frac{\pi}{2} - \beta$. Оно изображено на рис. 5. Штрихами показано направление директора в разных точках. В отличие от магнитного поля оно неоднородно и вдоль оси x за счет влияния боковых стенок.

Вернемся к критерию перехода Фредерикса. Согласно выражению (70), порог $\Delta\mu_n$ зависит от анизотропии формы ячейки $\delta = \Delta\mu/\Delta\eta = h/l$, т.е.

$$\Delta\mu_n = \pi\mu_\chi \sqrt{1 + h^2/l^2}. \quad (80)$$

Для очень длинной ячейки получаем классический критерий Фредерикса, если учесть дополнительно, что в однородном магнитном поле $\Delta\mu = Hh$.

Нетривиальный результат получается для очень короткой ячейки $l \ll h$. Тогда критерий перехода сводится к следующему:

$$\Delta\mu \geq \pi\mu_\chi h l^{-1} \rightarrow h l^{-1} \leq \Delta\mu/\Delta\mu_\infty. \quad (81)$$

Здесь второе неравенство эквивалентно первому и $\Delta\mu_\infty = \pi\mu_\chi$ есть порог бесконечной длинной ячейки (слоя). Это неравенство накладывает ограничение на геометрию ячейки. Его смысл заключается в том, что переход становится невозможным при большой величине отношения h/l , т.е. для слишком короткой ячейки.

В общем случае нужно рассматривать двупараметрический критерий (72), который применительно к нашей задаче перепишем, учитывая выражения для магнитных потенциалов через размеры ячейки

$$h^{-2} + l^{-2} \leq h_\Phi^{-2}, \quad h_\Phi = \pi\mu_\chi/H. \quad (82)$$

Величина h_ϕ известна в физике жидких кристаллов как пороговая толщина для бесконечного слоя (по Фредериксу) или корреляционная длина ориентационного поля НЖК в магнитном поле.

В предыдущем разделе подобное неравенство (72) было наглядно представлено как внутренность круга в обратном пространстве ($\Delta\eta^{-1}$, $\Delta\mu^{-1}$). В нашем случае получается аналогичный результат в переменных l^{-1} , h^{-1} , а радиусом является обратная корреляционная длина h_ϕ^{-1} . В пространстве же (l , h) неравенство (82) описывается как внешняя область кривой, называемой "крест"

$$h^2 + l^2 \leq l^2 h^2 h_\phi^{-2}.$$

Самой кривой соответствует знак неравенства. На рис. 6 она показана в первом квадранте. В полярных координатах ($h = \rho \cos \chi$, $l = \rho \sin \chi$) это неравенство имеет вид

$$\rho \geq h_\phi / \sin \chi \cos \chi. \quad (83)$$

Здесь ρ имеет смысл диагонали нашего прямоугольника (l , h), а χ – угол, образуемый ею с боковой стенкой. Бифуркационная граница (четверть "креста" в первом квадранте) представляет собой кривую $\rho(\chi)$, похожую на квадратичную гиперболу с асимптотами $h = h_\phi$ и $l = h_\phi$. Она является геометрическим местом концов диагоналей (всех прямоугольников), исходящих из начала координат. Вписанные четырехугольники (с одной вершиной, касающейся этой границы) являются предельно малыми по величине диагонали. В прямоугольниках с меньшими диагоналями деформации (при данном поле H) не возникают – перехода Фредерикса нет. Чем больше магнитное поле H , тем ближе в соответствии с формулой (82) би-

фуркационная граница к началу "координат" $h = 0$, $l = 0$. Этот результат может быть полезен при анализе поведения НЖК в узких порах, микрокапсулах, включенных в матрицу и замкнутых кюветах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репьева А.Н., Фредерикс В.К. // Журн. русского физ.-хим. о-ва. Физика. 1927. Т. 59. Вып. 2. С. 183.
2. Freedericksz V.K., Zolina V.V. // Trans. Am. Electrochem. Soc. 1929. V. 55. P. 85.
3. Freedericksz V.K., Zolina V.V. // Ztschr. Krist. 1931. B. 79. № 1/4. S. 255.
4. Фредерикс В.К., Цветков В.Н. // Докл. АН СССР. 1935. Т. 2. № 7. С. 528.
5. Freedericksz V.K., Zwetkoff V.N. // Acta Physicochim. URSS. 1935. V. 3. № 6. S. 895.
6. Oseen C.W. // Arkiv. mat., astron., fys., 1925. B 19A. № 9. S. 16.
7. Zocher H. // Phys. Ztschr. 1927. B. 28. S. 790.
8. Van Wyk A. // Ann. Phys. 1929. B. 3. S. 879.
9. Берсенев Г.А., Гребенкин М.Ф. // Кристаллография. 1983. Т. 28. № 5. С. 998.
10. Аэро Э.Л. Вопросы физики формообразования и фазовых переходов. Межвуз. сб. науч. тр. Калинин: КГУ, 1986. С. 68.
11. Аэро Э.Л. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65. B. 2. С. 342.
12. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит. 1960. Т. 11. С. 166.
13. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.
14. Блиннов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978.
15. Лэм Д.Л. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. С. 163.

The Theory of Freedericksz Transitions in Curvilinear Closed Domains of Nematic Liquid Crystals Exposed to Inhomogeneous Magnetic Fields

E. L. Aero

Institute of Machine Sciences, Russian Academy of Sciences
Bol'shoi pr. 61, St. Petersburg, 199178 Russia

Abstract – The theory of elastic bend and splay deformations in nematic liquid crystals is generalized so as to include the case of two-dimensional director fields $\mathbf{l}(x, y)$ in closed curvilinear cells exposed to inhomogeneous magnetic fields $\mathbf{H}(x, y)$. A general method is proposed for solving a nonlinear equation of the orientation continuum. Expressions are obtained that describe the two-dimensional director field $\mathbf{l}(x, y)$ in cells of various shapes. The problem of deformation instability is solved for the Freedericksz transitions that are usually considered only in plane-parallel layers. The possibility of threshold effects upon going from one inhomogeneous director field $\mathbf{l}_0(x, y)$ to another $\mathbf{l}_1(x, y)$ is demonstrated, and generalized criteria are formulated for such threshold transitions. In a rectangular cell, the Freedericksz transition depends on both longitudinal and transverse dimensions. The side walls may completely eliminate the transition, even in a very strong disorienting magnetic field. The proposed theory can be applied to the analysis of behavior of nematic liquid crystals in thin pores, cracks, microchannels (capillaries), and microcapsules and employed in the development of liquid-crystal displays and data-processing devices. The theory is quite general and is valid for all liquid crystals, from "classical" to polymeric, possessing orientational elasticity.