

УДК 541.64:539.3

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ФРОНТАЛЬНОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ

© 1994 г. Р. А. Турусов, В. В. Метлов

Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова
Российской академии наук
117977 Москва, ул. Косыгина, 4

Поступила в редакцию 21.09.93 г.

Излагаются основы континуальной теории механических явлений при фронтальном отверждении первоначально жидких сред. Сообщаются результаты приложения такого подхода к анализу механических явлений при фронтальном отверждении "полимерного жидкого шара" и анизотропного цилиндра из армированного пластика, а также к анализу взаимодействия двух растущих в вязкой жидкости твердых частиц.

Процессы отверждения, имеющие место как в природных превращениях веществ, так и в технологиях получения различных материалов (в том числе и конструкционных) заслуживают достаточно пристального изучения, ибо ими часто определяются свойства и качество материалов и объектов. Здесь делается попытка рассмотрения лишь одного, но достаточно важного аспекта отверждения – механических явлений, сопровождающих процессы перехода веществ из жидких или газообразных в твердые. Наиболее общим процессом отверждения является неоднородное по объему отверждение. Если же ширина зоны отверждения меньше характерного размера отверждаемой области, то можно говорить о фронтальном характере отверждения. Подобный процесс, по-видимому, представляет наибольший интерес с точки зрения материаловедения и механики, ибо в результате него могут возникать имеющие существенное значение напряжения, движения масс и разрывы вещества. Кроме того, неоднородное отверждение применимо для рассмотрения процессов отверждения как на макро-, так и на микроуровне.

Континуальная теория механики фронтального отверждения "вышла" из дискретного подхода к анализу и описанию механических явлений при фронтальном отверждении. Н.С. Ениколов, занимаясь кинетикой неоднородного и фронтального отверждения полимеров, не только поддержал в свое время, но и принял участие в разработке дискретной модели механических явлений, сопровождающих процесс неоднородного отверждения [1, 2]. Дискретная модель физически ясно отражает механизм явлений, но она достаточно громоздка и практически не пригодна для решения сравнительно сложных по конфигурации и постановке задач. Однако все разработанные тогда физические принципы легли в основу континуального подхода.

Главной движущей силой механических явлений при отверждении является изменение плотности вещества или (в геометрическом плане) усадка. При неоднородном отверждении большая доля усадки осуществляется в сравнительно узком переходном слое. И потому основное внимание в континуальном подходе сосредоточено на непрерывном движении поверхности раздела $S^*(t)$ твердой и жидкой зон. Усадка в поверхностном слое учитывается заданием на $S^*(t)$ скачков материальной скорости и тензора напряжения, которые определяются из рассмотрения $S^*(t)$ как предельного случая размытого фронта (т.е. фронта не нулевой толщины) усадки. И уже затем осуществляются постановки краевых задач для различных типов сред.

Граница $S^*(t)$ разделяет тело Ω на две области: $\Omega_1(t)$, где вещество находится в состоянии 1, характеризуемом плотностью массы ρ_1 и соответствующими механическими свойствами; $\Omega_2(t) = \Omega / \Omega_1(t)$ с веществом, перешедшим в состояние 2. Поверхность $S^*(t)$ движется по материальным частицам, которые при прохождении через них фронта отверждения $S^*(t)$ переходят из состояния 1 в состояние 2; область $\Omega_2(t)$ растет вследствие уменьшения области $\Omega_1(t)$. Из-за скачка плотности и механических свойств на фронте $S^*(t)$ он является поверхностью сильного разрыва. Как известно, в этом случае независимо от модели среды должны выполняться следующие соотношения сильного разрыва [3, 4]:

$$[\rho(v_n - s_n)]_2^1 = 0, \quad (1a)$$

$$[\sigma n]_2^1 = 0. \quad (1b)$$

Здесь ρ – плотность массы, v_n – нормальная к S^* составляющая материальной скорости v ; n – единичная нормаль к S^* , s_n – скорость движения S^* по нормали; черточкой внизу отмечены векторные величины, а двумя черточками – тензорные величины.

чины; $[\phi]_2^1$ обозначает скачок величины ϕ при переходе через S^* из Ω_2 в Ω_1 .

Формула (1а) есть следствие закона сохранения массы и отражает разность между плотностями потока присоединяемой к Ω_2 массы (при $i = 2$) и массы, удаляемой из Ω_1 (при $i = 1$). Непрерывность вектора напряжения на $S^*(t)$, требуемая соотношением (1б), есть следствие закона сохранения количества движения при пренебрежении инерционными силами.

Соотношений (1) однако недостаточно для формулировки краевых задач. Полный комплект условий разрыва на $S^*(t)$ получается из рассмотрения структуры размытого фронта отверждения.

Пусть при отверждении материал проходит непрерывный ряд промежуточных состояний, обозначаемых параметром $\eta \in [1, 2]$. Размытый фронт представляет собой непрерывно перемещающийся тонкий слой, внутри которого параметр η монотонно изменяется от 2 к 1, считая по нормали к фронту в направлении его движения. Скорость деформации свободной усадки по отношению к изменению η обозначим $\underline{\varepsilon}(\eta)$, так как в общем случае это тензорная величина, а соответствующий состоянию η тензор упругого мгновенных модулей обозначим $A(\eta)$. Тогда при бесконечно малой ширине фронта и конечной скорости его движения процесс отверждения протекает за бесконечно малое время и напряженно-деформированное состояние в пределе может быть описано определяющим соотношением для упругого мгновенного деформирования

$$\underline{\sigma}'(\eta) = A(\eta)(\underline{\varepsilon}'(\eta) - \underline{\varepsilon}(\eta)), \quad (2)$$

где $\underline{\sigma}'(\eta)$ и $\underline{\varepsilon}'(\eta)$ – скорости изменения тензоров напряжения и деформации относительно изменения η . В соотношении (2) по сути заложено предположение о том, что скорость полной деформации $\underline{\varepsilon}'(\eta)$ равна сумме скоростей упругой деформации и деформации свободной усадки. Это условие выполняется для геометрических деформаций только когда они малы ($\epsilon \ll 1$).

Поскольку толщина фронта в нашем рассмотрении устремляется к нулю, воздействие усадки размытого фронта на отверженную область исчезает вследствие того, что объем размытого фронта, в котором действует усадка, также стремится к нулю.

Поэтому в отверженной области Ω_2 скорости напряжений и деформаций по η в любом элементе размытого фронта стремятся к нулю. Из условия сплошности (1) вытекает, что скорости деформаций по η в касательной плоскости к $S^*(t)$ внутри фронта в пределе равны нулю. Таким образом, с учетом непрерывности вектора напряжений $\underline{\sigma}$ при переходе внутрь размытого фронта в пределе будем иметь

$$\underline{\sigma}'(\eta)\underline{p} = 0,$$

$$\underline{\varepsilon}'(\eta) = \frac{1}{2} \{ \underline{b}'(\eta) \otimes \underline{p} + \underline{p} \otimes \underline{b}'(\eta) \}. \quad (3)$$

Кружочком с заключенным в нем крестиком обозначено тензорное произведение векторов \underline{b}' и \underline{p} , которое представляет собой тензор, действующий на вектор по правилу

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{c} = \underline{a} (\underline{b} \underline{c}),$$

где справа в круглых скобках – скалярное произведение двух векторов [5].

Формула (3) для $\underline{\varepsilon}'$ дает общий вид тензора деформации, имеющего нулевые компоненты в касательной к $S^*(t)$ плоскости. При этом нормальная компонента вектора \underline{b}' равна скорости относительного изменения толщины элемента фронта в направлении нормали \underline{p} , а касательные составляющие \underline{b}' равны скоростям изменения углов сдвига в плоскостях, ортогональных к $S^*(t)$.

Исключив из выражений (2) и (3) $\underline{\sigma}'$ и $\underline{\varepsilon}'$, придем к линейному векторному уравнению для определения \underline{b}'

$$\{ (A(\eta)) [1/2 (\underline{b}'(\eta) \otimes \underline{p} + \underline{p} \otimes \underline{b}'(\eta)) - \underline{\varepsilon}(\eta)] \} \underline{p} = 0. \quad (4)$$

Определив отсюда \underline{b}' , из формул (2) и (3) найдем $\underline{\varepsilon}'(\eta)$ и $\underline{\sigma}'(\eta)$. Интегрируя эти функции по η от 1 до 2, определим полные изменения (скачки) тензоров деформации и напряжения в некотором элементе при прохождении через него фронта отверждения.

Для определения величины разрыва вектора материальной скорости следует рассмотреть интервал времени $\delta t = \epsilon \Delta t$, $\Delta t = \Delta / s_n$, $\epsilon \ll 1$, где Δt – время отверждения некоторого элемента, Δ – ширина размытого фронта, s_n – скорость движения фронта по нормали. Проведем координатную линию z по нормали \underline{p} (рис. 1). Исходя из указанного выше геометрического смысла вектора $\underline{b}'(\eta)$ и функциональной зависимости $\eta = \eta(t, z)$ на линии z , для скачка материальной скорости (или скорости частиц) можно написать

$$\begin{aligned} [\underline{y}]_2^1 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \int_0^\Delta \underline{b}'(\eta(t, z)) \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \delta t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0(\delta t) \right] dz + 0(\Delta) \right\} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{s_n}{\epsilon \Delta} \int_0^\Delta \underline{b}'(\eta(t, z)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\epsilon \Delta}{s_n} + 0(\epsilon \Delta) \right] dz + 0(\Delta) \right\} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_1^2 \underline{b}'(\eta(t, z)) \times \\ &\quad \times \frac{\partial z}{\partial t} d\eta = s_n \int_1^2 \underline{b}'(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial z(t, \eta)}{\partial t} \Big|_{\eta = \text{const}} = s_n. \quad (6)$$

Таким образом получаем полный комплекс условий разрыва на фронтальной поверхности S^*

$$\begin{aligned} [\underline{\sigma}]_1^2 &= \int_1^2 \underline{\sigma}'(\eta) d\eta, \quad \underline{\sigma}'(\eta) = A(\eta) (\underline{\epsilon}'(\eta) - \underline{\epsilon}(\eta)), \\ \underline{\epsilon}'(\eta) &= \frac{1}{2} [\underline{b}'(\eta) \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{b}'(\eta)], \quad [\underline{\epsilon}]_1^2 = \\ &= \int_1^2 \underline{\epsilon}(\eta) d\eta = \frac{1}{2} (\underline{b} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{b}), \quad \underline{b} = \int_1^2 \underline{b}'(\eta) d\eta, \\ [\underline{y}]_1^2 &= \underline{b} s_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) содержат второе условие (1), так как выражение (4) означает, что $\underline{\sigma}' \underline{n} = 0$. Для получения из формулы (7) первого условия в уравнение (1) введем параметр относительного изменения удельного объема при отверждении $\theta = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$ и перепишем выражение (1) в виде

$$(1 + \theta) v_n^{(1)} - v_n^{(2)} = \theta s_n. \quad (8)$$

При $\theta \ll 1$ соотношение (8) имеет вид

$$[v_n]_2^1 = \theta s_n. \quad (9)$$

Из формулы (7) имеем

$$\theta = \text{tr} [\underline{\epsilon}]_1^2 = (\underline{b} \underline{n}). \quad (10)$$

Умножая последнее равенство в выражении (7) скалярно на \underline{n} , с учетом уравнения (10) получим формулу (9).

Решение системы (7) в скоростях по η имеет особенно простой вид в изотропном случае фронтального отверждения гомогенного полимера. Скорости по η сдвиговых деформаций и касательных напряжений в реакционной зоне в преде-

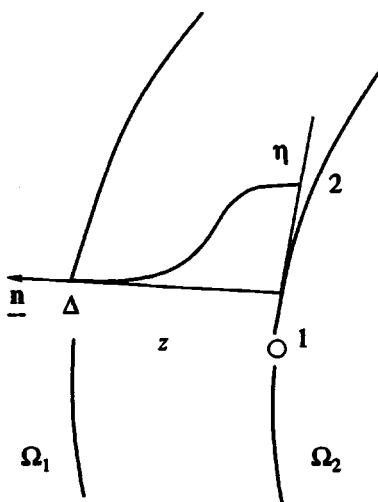


Рис. 1. Схема "размытого" фронта.

ле при $\Delta \rightarrow 0$ равны нулю, а η – скорости удлинения и нормальных напряжений имеют вид

$$b'_n = e \frac{1+v}{1-v}, \quad \sigma' = -\frac{Ee}{1-v}, \quad (11)$$

где E – модуль Юнга, v – коэффициент Пуассона.

Следует заметить, что уравнения (7) справедливы для конечных поверхностей S^* , не пересекающихся с другими поверхностями.

Решение любой конкретной краевой задачи механики конденсированных сред невозможно, как известно, без обращения к уравнениям равновесия

$$\text{div} \underline{\sigma} + \underline{f} = 0 \quad (\underline{x} \in \Omega) \quad (12)$$

(\underline{f} – объемная плотность внешних сил); к геометрическим соотношениям и определяющему уравнению (уравнению связи) в первоначальном (неотверженном) состоянии

$$\underline{\epsilon} = \text{def} \underline{u}, \quad \underline{\sigma} = A(1)\underline{\epsilon} \quad (\underline{x} \in \Omega_1(t)). \quad (13)$$

Здесь \underline{u} – вектор смещения материальной точки из ненапряженного состояния тела в неотверженном состоянии.

Такие же соотношения нужны и для отверженной области $\Omega_2(t)$, но для скоростей

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \text{def} \underline{y}, \quad \dot{\underline{\sigma}} = A(2)\dot{\underline{\epsilon}} \quad (\underline{x} \in \Omega_2(t)) \quad (14)$$

(\underline{y} – упомянутый ранее вектор материальной скорости).

Кроме этого нужны граничные условия в напряжениях и смещениях на неподвижных (консервативных) границах тела Ω

$$\underline{u}|_{S_n} = \underline{u}^{(0)}, \quad \underline{\sigma} \underline{n}|_{S_\sigma} = \underline{p}^{(0)}, \quad S_n \cup S_\sigma = \partial\Omega. \quad (15)$$

Уравнения (12) – (15) вместе с условиями на поверхности фронта S^* , определяемыми системой (7), представляют собой полную систему уравнений механики фронтально отверждаемого тела.

В отличие от механики растущего тела [6] в данной проблеме предыстория присоединяемых к Ω_2 элементов здесь не задана, а должна быть найдена в ходе решения задачи.

Подобно краевой задаче для растущего упругого тела, рассмотренная здесь задача допускает сведение к задаче теории упругости фиксированного тела, но в скоростях.

Действительно, скорости $\dot{\underline{\sigma}}$, $\dot{\underline{\epsilon}}$, у удовлетворяют в Ω стандартным уравнениям теории упругости (12), (13) и обычным граничным условиям (15) консервативной части поверхности $\partial\Omega$, если их проинтегрировать по t

$$\begin{aligned} \text{div} \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{f}} &= 0, \quad \dot{\underline{\epsilon}} = \text{def} \underline{y}, \quad \dot{\underline{\sigma}} = A(\eta) \dot{\underline{\epsilon}}, \\ \eta &= \begin{cases} 1, \underline{x} \in \Omega_1 \\ 2, \underline{x} \in \Omega_2 \end{cases} \quad \dot{\underline{\sigma}} \underline{n}|_{S_\sigma} = \dot{\underline{p}}^{(0)}, \quad \dot{\underline{u}}|_{S_n} = \dot{\underline{u}}^{(0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Остается установить условия на подвижной поверхности $S^*(t)$. Последнее из условий (7) дает соотношение для скачка скорости

$$[\mathbf{v}]_2^1 = \mathbf{b} s_n. \quad (17)$$

Условие для напряжений получим из следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\tau^*(\mathbf{x}) - 0, \mathbf{x}) &= \underline{\sigma}^{*(1)}(\mathbf{x}), \\ \underline{\sigma}(\tau^*(\mathbf{x}) + 0, \mathbf{x}) &= \underline{\sigma}^{*(2)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tau^*(\mathbf{x})$ – момент прохождения фронта S^* через точку \mathbf{x} . Подействуем на выражение (18) оператором дивергенции. В результате, используя прямоугольные декартовы координаты (x_i) , в индексных обозначениях (по повторяющемуся индексу суммирования от 1 до 3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^*(\mathbf{x})}{\partial x_j} &= \dot{\sigma}_{ij}(\tau^*(\mathbf{x}) \mp 0, \mathbf{x}) \frac{\partial \tau^*}{\partial x_j} + \\ &+ \left. \frac{\partial \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\tau = \tau^*(\mathbf{x}) \mp 0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как на поверхности $S^*(t)$ функция $\tau^*(\mathbf{x})$ принимает постоянное значение t , то градиент $\nabla \tau^*$ ортогонален к $S^*(t)$, т.е.

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial x_j} = \frac{n_j}{s_n}, \quad s_n = |\nabla \tau^*|^{-1}, \quad (20)$$

где по-прежнему \mathbf{n} – единичная внешняя нормаль к S^* , s_n – скорость движения S^* по нормали. В силу уравнения равновесия (12) второе слагаемое в правой части (19) равно

$$-\dot{f}_i(\tau^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = -\dot{f}_i^*(\mathbf{x}).$$

С учетом этого обстоятельства получаем окончательно из формул (17) – (20) выражение для скачка вектора напряжения на S^*

$$[\dot{\sigma}\mathbf{n}]_2^1 = (\operatorname{div} [\underline{\sigma}]_2^1 + [\mathbf{f}]_2^1) s_n. \quad (21)$$

Таким образом, соотношения (17) и (21) служат условиями сопряжения тел Ω_1 и Ω_2 .

Решением исходной задачи будет функция

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t, \mathbf{x}) &= \underline{\sigma}(0, \mathbf{x}) + \int_0^t \dot{\underline{\sigma}}(\tau, \mathbf{x}) d\tau \quad (t < \tau^*(\mathbf{x})), \\ \underline{\sigma}(t, \mathbf{x}) &= \underline{\sigma}^{*(1)}(\mathbf{x}) + \Delta \underline{\sigma}(\mathbf{x}) + \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \dot{\underline{\sigma}}(\tau, \mathbf{x}) d\tau \quad (22) \\ &\quad (t > \tau^*(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Здесь $\Delta \underline{\sigma}(\mathbf{x})$ обозначает величину временного разрыва

$\Delta \underline{\sigma}(\mathbf{x}) = \underline{\sigma}(\tau^*(\mathbf{x}) + 0, \mathbf{x}) - \underline{\sigma}(\tau^*(\mathbf{x}) - 0, \mathbf{x}), \quad (23)$ которая для функций, непрерывных по t при $t \leq \tau^*(\mathbf{x})$ и по $\mathbf{x} \in \Omega_m(t)$ ($m = 1, 2$) совпадает с вели-

чиной пространственного разрыва при переходе через $S^*(\tau^*(\mathbf{x}))$ в точке \mathbf{x} :

$$\Delta \underline{\sigma}(\mathbf{x}) = [\underline{\phi}]_1^2. \quad (24)$$

При использовании модели упругой жидкости в неотверженном состоянии 1 определяющее уравнение имеет вид

$$\underline{\sigma} = -pI, \quad p = \phi(\rho) \quad (25)$$

(p – давление, ρ – плотность, ϕ – заданная функция). Уравнение квазистатического равновесия в Ω_1 $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$ дает $\operatorname{grad} p = 0$, и тогда $p = p(t)$.

Для случая вязкой жидкости определяющим уравнением будет [1]

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= -pI + \Phi(d, \rho), \quad p = \phi(\rho), \\ d &= \operatorname{def} \mathbf{y} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{y} + (\nabla \mathbf{y})^T), \end{aligned} \quad (26)$$

где Φ – изотропная функция тензора скоростей деформации d , ∇v – пространственный градиент скорости $\mathbf{y}(t, \mathbf{x})$.

Здесь не рассматривается случай вязкоупругого состояния отверждаемого и отверженного материалов по двум причинам: во-первых, это громоздко, во-вторых, в тех приложениях, которые будут рассмотрены, учет вязкоупругости не меняет принципиально результата, но затеняет физический механизм.

ФРОНТАЛЬНОЕ ОТВЕРЖДЕНИЕ ЖИДКОГО ШАРА

Рассмотрим отверждение первоначально жидкого полимерного шара радиуса a , сферическим фронтом радиуса $r_*(t)$, $r_*(0) = a$, движущимся от внешней поверхности внутрь. Пусть жидкое ядро $\Omega_1(t) = \{\mathbf{x}: r(\mathbf{x}) < r_*(t)\}$ подчиняется определяющему уравнению линейно-вязкой сжимаемой среды

$$\underline{\sigma}^{(1)} = -pI + \lambda I \operatorname{div} \mathbf{y}^{(1)} + \mu d, \quad p = \phi(\rho). \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в уравнение равновесия (12) при $f = 0$ и присоединяя к полученному уравнение неразрывности, будем иметь полную систему уравнений в области $\Omega_1(t)$

$$\begin{aligned} -\operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{y}^{(1)} + \mu \Delta \mathbf{y}^{(1)} &= 0, \\ p = \phi(\rho), \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{y} &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где Δ – оператор Лапласа. В начальный момент шар однороден с плотностью ρ_0 и давлением $p_0 = \phi(\rho_0)$.

Поскольку задача сферически симметрична, из трех компонент вектора \mathbf{y} ненулевой является радиальная скорость v_r .

Решением уравнения (28) является функция

$$v_r^{(1)}(t, r) = -\frac{r}{3\rho} \dot{\rho}. \quad (29)$$

Для фронтальной поверхности $S^*(t) = r_*(t)$ в случае изотропной усадки $e(\eta) = e(\eta)/\eta$ и изотропного материала во всех состояниях $\eta \in [1, 2]$ из формул (7) и (11) получаем выражения для скачков радиальной скорости и окружного напряжения

$$\begin{aligned} [v_r]_2^1 &= \theta \dot{r}_*, \quad \theta = \int_1^2 \frac{e(\eta) (1 + v(\eta))}{1 - v(\eta)} d\eta, \\ [\sigma_\varphi]_1^2 &= - \int_1^2 \frac{E(\eta) e(\eta)}{1 - v(\eta)} d\eta, \end{aligned} \quad (30)$$

где $E(\eta)$ и $v(\eta)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

В состоянии $\eta = 2$ материал упругий, подчиняющийся закону Гука (2) с модулем Юнга $E = E(2)$ и коэффициентом Пуассона. Из выражения (14), закона Гука и граничных условий для образующейся твердой оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(t, r_*(t)) &= \sigma_r^{(1)}(t, r_*(t)) = -p_1(t), \\ \sigma_r^{(2)}(a) &= p_0 \end{aligned} \quad (31)$$

и уравнений равновесия в области Ω_2

$$\frac{d\sigma_r^{(2)}}{dr} = 2 \frac{\sigma_\varphi^{(2)} - \sigma_r^{(2)}}{r} \quad (r_* \leq r \leq a) \quad (32)$$

получаем

$$v_r^{*(2)} = D(r_*(t)) \dot{\sigma}_r^{*(2)}, \quad (33a)$$

$$D(r_*) = \frac{r_* [(1 - 2v) 2r_*^3 + a^3 (1 + v)]}{2E(r_*^3 - a^3)}, \quad (33b)$$

$$\dot{\sigma}_r^{*(2)} = -\dot{p}_1(t) - \frac{2[\sigma_\varphi]_1^2}{r_*} \dot{r}_*. \quad (33c)$$

При выводе формулы (33) продифференцировано по t первое граничное условие (31)

$$\dot{\sigma}_r^{*(2)} + \frac{d\sigma_r^{(2)}(t, r_*(t))}{dr} \dot{r}_* = -\dot{p}_1(t). \quad (34)$$

Для напряжений в Ω_1 из уравнений (27) и (29) получаем

$$-\sigma_r^{(1)} = -\sigma_\varphi^{(1)} = p_1(t) = \phi(\rho(t)) + \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (35)$$

Наконец, выражая скачок скорости в формуле (30) через разницу $v_r^{*(1)}$ и $v_r^{*(2)}$ из уравнений (29) и (33) и учитывая выражения (33c) и (35), по-

лучим систему уравнений (задачу Коши) для $p_1(t)$ и $\rho(t)$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 - \dot{\rho} \frac{r_*}{3\rho D(r_*)} &= \frac{\theta \dot{r}_*}{D(r_*)} - \frac{2[\sigma_\varphi]_1^2 \dot{r}_*}{r_*}, \\ \left(\lambda + \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho} &= p_1 - \phi(\rho) \end{aligned} \quad (36)$$

с начальными условиями

$$p(0) = p_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad p_0 = \phi(\rho_0). \quad (37)$$

Для несжимаемой жидкости ($\dot{\rho} = 0$) из условия (37) с учетом (33) для $D(r_*)$ имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - 2 \ln \left(\frac{r_*}{a} \right) \left\{ \frac{E\theta}{1+v} + [\sigma_\varphi]_1^2 \right\} - \\ &- \frac{E\theta(1-v)}{(1-2v)(1+v)} \ln \frac{2r_*^3(1-2v) + a^3(1+v)}{3a^3(1-v)}, \end{aligned} \quad (38)$$

где величины θ и $[\sigma_\varphi]_1^2$ вычисляются по формулам (30).

Предположим, что при отверждении удельный объем уменьшается, т.е. $e(\eta) < 0$ и $\epsilon_y = \int_1^2 e d\eta < 0$. Коэффициент при $\ln(r_*/a)$ (второе слагаемое в формуле (38)) с помощью выражения (30) представим в виде

$$\begin{aligned} -4 \int_1^2 \left\{ G(2) - G(\eta) \frac{e(\eta) (1 + v(\eta))}{1 - v(\eta)} \right\} d\eta, \\ G(\eta) = \frac{E(\eta)}{2(1 + v(\eta))} \end{aligned} \quad (39)$$

($G(\eta)$ – модуль сдвига).

Поскольку $G(2) > G(\eta)$, выражение (39) положительно, и, следовательно, $p_1 \rightarrow -\infty$ при $r_* \rightarrow 0$, т.е. при приближении фронта к центру в жидком ядре возникают большие растягивающие всесторонние и равномерные (т.е. гидростатические) напряжения, которые либо рвут жидкость, либо вынуждают ее вскипать. И то и другое приводит к образованию каверн, делая материал дефектным.

Но при $t = 0$ и $r_* = a$ $p_1 = p_0 > 0$ и производная dp_1/dr_* из выражения (38) при $r_* = a$ оказывается отрицательной. Это значит, что вначале при движении фронта вглубь от поверхности давление в жидком ядре растет. В этом виновата образующаяся тонкая твердая оболочка, которая при своем зарождении вследствие усадки материала стремится сократить свои линейные размеры, в том числе и радиус, обжимая при этом жидкое ядро. Но по мере набора толщины твердая оболочка начинает препятствовать сокращению

последующих отверждаемых слоев, удерживая их за внешнюю поверхность. И теперь твердеющий слой вынужден смещаться к оболочке. В результате давление оболочки на жидкое ядро начинает ослабевать, становясь постепенно отрицательным. Момент изменения ситуации определяется соотношением величин усадок в жидком и твердом состояниях.

Аналогичная ситуация возникает при отверждении толстостенного намоточного цилиндра из армированного полимера, отверждаемого фронтом, движущимся снаружи внутрь. Но там ситуация усугубляется сильной анизотропией свойств, и прежде всего анизотропией модулей и усадки.

ОТВЕРЖДЕНИЕ КОМПОЗИТНОГО ЦИЛИНДРА ОРТОТРОПНОЙ СТРУКТУРЫ

Пусть на упругой цилиндрической оправке с внутренним радиусом a и наружным радиусом b намотан композитный (например, стеклопластиковый) цилиндр с внешним радиусом R .

В этом цилиндре от внешней поверхности внутрь движется фронт отверждения радиуса $r_*(t)$. Отверждается первоначально жидкое связующее, например, на эпоксидной основе. В исходном состоянии выделенный элемент материала по отношению к процессу отверждения можно считать изотропным с коэффициентом объемного сжатия K_h (связующее свободно движется между армирующими волокнами). В отверженном состоянии материал – ортотропный с модулями E , и E_φ в радиальном и окружном направлениях.

Тензор скорости усадки свободного элемента материала запишем в виде

$$\varepsilon_y'(\eta) = \delta(\eta - 1)/\varepsilon_h v_c + \delta(\eta - 2)\varepsilon_r, \quad (40)$$

где $\delta(\eta)$ – дельта-функция. Соотношение (40) означает, что усадка происходит лишь в первоначальном (жидком) и в конечном (твердом) состояниях, I – единичный тензор, ε_h – линейная усадка связующего в жидком состоянии, v_c – объемная доля связующего в композите, ε_r – тензор анизотропной свободной усадки с компонентами ε_r и ε_{φ} . В пренебрежении зависимостью констант материала от температуры и η задача решается в квадратурах, которые здесь не приводим ввиду их громоздкости.

На рис. 2 и 3 даны результаты численных расчетов для намоточного композита односторонней структуры с $v_c = 0.3$, $a = 40$, $b = 50$, $R = 100$ (в мм); модули Юнга E (в МПа) и коэффициенты Пуассона ν твердого связующего (индекс c), наполнителя (индекс a) и оправки (индекс g):

$$E_c = 10^3, \quad E_a = 7 \times 10^4, \quad E_g = 2 \times 10^5, \quad \nu_c = 0.33, \\ \nu_a = 0.3, \quad \nu_g = 0.27, \quad K_h = 2 \times 10^3.$$

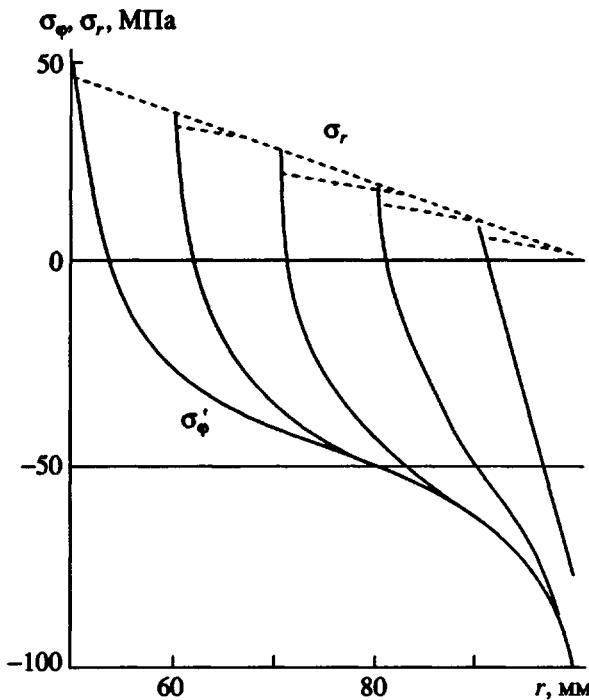


Рис. 2. Распределение напряжений в отверженной части композитного цилиндра.

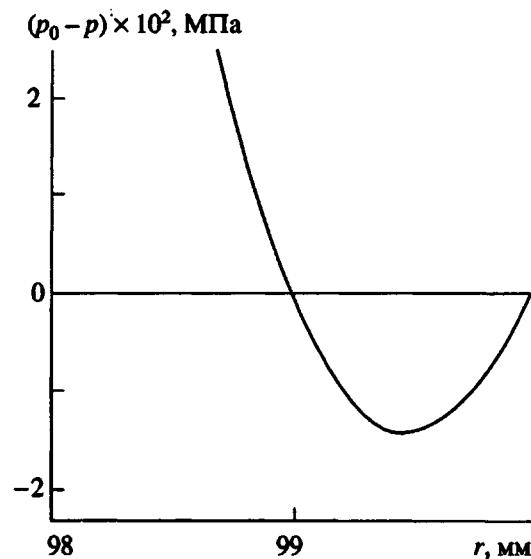


Рис. 3. Зависимость давления в зоне жидкого связующего от текущего положения фронта отверждения.

Свободная усадка связующего в жидком состоянии $\varepsilon_h = -0.02$, в твердом состоянии $\varepsilon_r = -0.02$.

Распределение напряжений в твердой зоне при нулевом внешнем давлении для пяти моментов времени дано на рис. 2. Левый край кривых для σ_r дает значение гидростатического напряжения в жидкой зоне перед фронтом. Более подробно на-

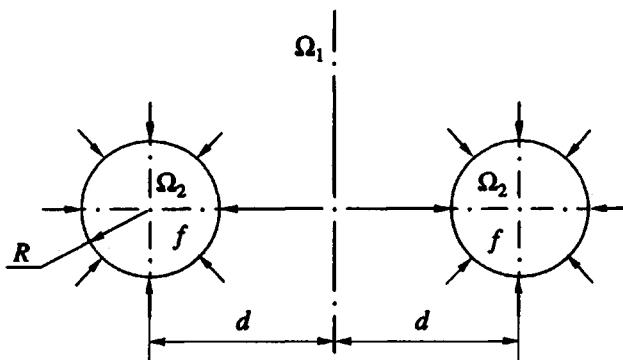


Рис. 4. Притяжение двух растущих вязкой среде твердых частиц.

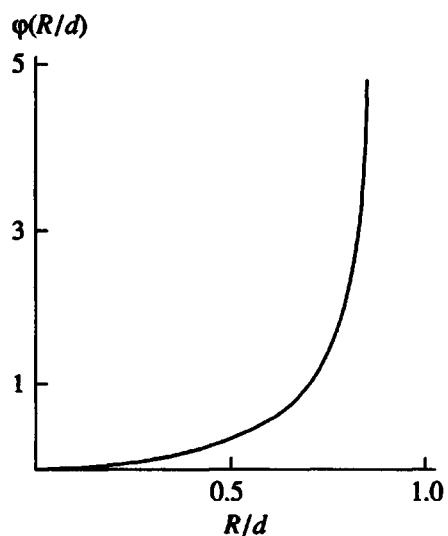


Рис. 5. Зависимость функции ϕ от радиуса растущих тел.

чальный участок изменения давления в зоне жидкого связующего в зависимости от радиуса фронта отверждения r_* , движущегося снаружи, показан на рис. 3. Как видно из этих результатов, при $r_* \leq 98$ мм (для $p_0 = 1$ атм) в зоне жидкого связующего формируется состояние всестороннего растяжения. Допущение о сохранении сплошности материала, соблюданное в задаче, приводит к выводу о возникновении таких всесторонних растягивающих напряжений в жидкости, при которых сохранение сплошности невозможно. Таким образом, в данном случае при $r_* = 98$ мм возникает реальная опасность разрыва жидкости, образования кольцевых трещин. Это неизбежно приведет к изменению характера движения фронта. В поле тяжести может нарушиться симметрия, что в последующем приведет к нерегулярному характеру образования дефектов.

С этим злом, казалось бы, можно бороться, либо создавая при отверждении давление снаружи, либо ведя намотку с регулируемым натягом. Первый способ оказывается малоэффективным, ибо большие давления, порядка тысяч атмосфер, способные перекрыть растягивающие напряжения при отверждении, приводят к потере устойчивости волокон — образованию свищей еще на стадии жидкого связующего. Сравнительно малые давления тоже приводят к потере устойчивости, но уже образующегося тонкого твердого наружного слоя, что приведет к получению несимметричного изделия. Усиленная намотка оказывается эффективна лишь для изделий сравнительно малых диаметров. В изделиях больших диаметров намотка не способна создать большие давления и потому неэффективна.

Фронт, движущийся от внутренней поверхности анизотропного цилиндра к внешней, приводит к таким же нежелательным результатам. Поэтому для того, чтобы получать бездефектные толстостенные оболочки из армированных полимеров, разработаны специальные режимы и технологии, основанные на подробном изучении процессов, происходящих при отверждении таких изделий.

МНОГОЦЕНТРОВОЕ ОТВЕРЖДЕНИЕ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Представление о термофлуктуационном механизме начала реакции отверждения, например, каких-либо олигомеров, с неизбежностью приводят к тому, что одним из возможных механизмов образования твердой фазы является фронтальный рост множества твердых зародышей в жидком олигомере и за его счет. То же самое можно сказать, по-видимому, о любом поликристаллическом или полиглобулярном веществе, т.е. даже однородное на макроуровне отверждение какого-либо объема на надмолекулярном уровне должно быть, вообще говоря, фронтальным. И при таком подходе при наличии континуальной теории механики фронтального отверждения у нас появляется возможность проанализировать механизм взаимодействия растущих твердых зародышей и оценить поля возникающих и затем остающихся (остаточных) внутри напряжений. Может оказаться, что эти последние играют отнюдь не последнюю роль в формировании дефектов на макроуровне и в нереализации ожидаемой обычно высокой прочности образующегося твердого вещества. Здесь мы остановимся только на механизме взаимодействия двух растущих вязкой среде твердых зародышей.

На поверхности роста зародышей происходит усадка (изменение плотности). Это требует притока (или оттока) жидкости из окружения к этим растущим поверхностям. В случае хотя бы двух

растущих по соседству зародышей усадка вызывает специфическое движение среды. Особенно большой отток (или приток) вещества к зародышам произойдет в пространстве между ними. Возникает несбалансированная сила, притягивающая (или отталкивающая) растущие зародыши, вынуждая их объединяться в агломераты различной иерархии.

Для математической формулировки проблемы притяжения (будем говорить лишь о нем) воспользуемся изотропным вариантом ($b = \theta \mu$, $\theta \ll 1$) условия для скачка материальной скорости на поверхности роста (8)

$$\mathbf{y}^{*(1)} = \mathbf{y}^{*(2)} + \theta \mu \mathbf{w}, \quad (41)$$

где $w = s_n - v_n^{*(2)}$ – скорость роста зародыша, остальные обозначения прежние.

Для несжимаемой линейно-вязкой среды в силу принципа суперпозиции соотношение (41) означает, что полная сила, действующая на зародыш, складывается из обычной силы вязкого сопротивления и силы взаимодействия, определяемой течением среды Ω_1 , удовлетворяющим уравнениям в декартовой системе координат x_k

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

(μ – вязкость), и граничному условию

$$\mathbf{y}^{*(1)} = \theta \mu \mathbf{w}.$$

Для плоской задачи двух частиц, растущих вокруг фиксированных в пространстве центров, изображенных на рис. 4, решение задачи было

получено в квадратурах и для силы взаимодействия ($\dot{R} = dR/dt = w$) привело к выражению

$$f = -4\pi\mu\theta R\phi(R/d),$$

$\phi(R/d) = [\operatorname{sh}\gamma(2\gamma\operatorname{ch}2\gamma - 1)]^{-1}$, $\operatorname{ch}\gamma = d/R$, где функция ϕ изображена на рис. 5. При $R/d \rightarrow 1$, т.е. при сближении встречно растущих поверхностей, сила $f \rightarrow \infty$. В случае, когда $\theta < 0$, давление между растущими частицами стремится к $-\infty$. Это означает, что в жидком слое, разделяющем растущие твердые частицы, может произойти нарушение сплошности и возникший разрыв может быть зафиксирован в твердой среде. Когда же таких частиц много, могут возникать самые разнообразные ситуации. Например, может иметь место переколяционный переход по жесткости в процессе отверждения, возникающий благодаря образованию непрерывного кластера на низких общих глубинах превращения, либо образование замкнутых твердых областей, внутри которых оказалась жидкость. Это жидкое вещество при последующем отверждении вынуждено будет сильно растягиваться и рваться, образуя внутренние "микродефекты".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турусов Р.А., Давтян С.П., Шкадинский К.Г., Розенберг Б.А., Андреевская Г.Д., Ениколопян Н.С. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 97.
2. Турусов Р.А., Розенберг Б.А., Ениколопян Н.С. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 1. С. 90.
3. Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983.
4. Седов Л.И. // Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983.
5. Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
6. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. // Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.

The Continuity Method in Mechanics of Frontal Solidifying

R. A. Turusov and V. V. Metlov

Semenov Institute for Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 4, Moscow, 117997 Russia

Abstract – There are stated the continuity theory foundations for mechanical phenomena in the frontal solidifying of initially fluid matter. There are reported the applications of the theory to the mechanical phenomena analysis for the frontal solidifying of fluid polymeric sphere and fiber inforced cylinder, and also to interaction analysis for two solids growing in viscous medium.