

УДК 541.64:539.3

© 1991 г. А. Л. Свистков, Л. А. Комар

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ  
ТЕРМОФЛУКТУАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ  
ДЛЯ ОПИСАНИЯ УСЛОВИЙ АДГЕЗИОННОГО  
И КОГЕЗИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОЙ  
МАТРИЦЫ ОКОЛО ТВЕРДОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ**

Рассмотрены особенности применения статистической термофлуктуационной теории прочности для анализа условий адгезионного и когезионного разрушения эластомерной матрицы около единичного твердого включения. Вычислены вероятности разрушающих напряжений, зависимость их от размеров включений, от скорости приложения нагрузки. Анализируются условия смены характера повреждения системы с адгезионного на когезионное при изменении размеров включений и скорости нагружения.

Широкое применение в промышленности имеют композитные материалы с твердым наполнителем зернистого типа и эластомерным связующим (резины). Их прочностные свойства существенно зависят от размеров включений [1]. Чтобы выяснить причину усиления материалов мелкодисперсным наполнителем Джент и Парк экспериментально исследовали условия появления адгезионных и когезионных повреждений в матрице около единичных твердых сферических включений [2]. Было показано, что повреждение эластомерного связующего происходит при значительно меньшем растягивающем напряжении около больших включений, чем в окрестности малых. Наблюдаемый масштабный эффект (зависимость прочности от геометрических размеров) хорошо известен [3, 4]. Статистическая теория объясняет его наличием в материале большого числа естественных неоднородностей и микротрещин, предлагает для описания соответствующие математические аппараты [5–10].

Реальные процессы разрушения материалов на эластомерной основе имеют временные характеристики. Это связано с существованием флюкутирующих структур на микроскопическом уровне [11, с. 555] и термофлуктуационным характером появления повреждений [12, 13]. Именно с кинетических позиций следует описывать явления роста поврежденности и масштабный эффект в полимерах [14]. Цель настоящей работы – обобщение аппарата статистической теории прочности Болотина [6] на кинетические представления теории термофлуктуационного разрушения Бартенева [3]. Полученные выражения использовали для численного моделирования экспериментов Джента и Парка.

За основу возьмем два утверждения. Первое из них имеет следующую математическую формулировку:

$$P_* = \prod_i \left( \prod_j P_{ij}^k \right) \left( \prod_n P_{in}^a \right), \quad (1)$$

где  $P_*$  – вероятность того, что в эластомере объемом  $V$  с площадью контакта с поверхностью наполнителя  $S$  на интервале времени  $[t_0, t]$  не произойдет адгезионных и когезионных повреждений;  $P_{ij}^k$  – вероятность отсутствия появлений в элементе объема  $\Delta V_j$  ( $\Delta V_j \subset V$ ) в интервале времени  $\Delta t_i$  ( $\Delta t_i \subset [t_0, t]$ ) когезионных повреждений;  $P_{in}^a$  – вероятность отсутствия

появлений в элементе поверхности контакта  $\Delta S_n$  ( $\Delta S_n \subset S$ ) в интервале времени  $\Delta t_i$  адгезионных повреждений.

Вторым отправным положением является допущение

$$\lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ \Delta V_j \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta t_i \Delta V_j} \ln P_{ij}^k = \Phi_k(\sigma_k) \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ \Delta S_n \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta t_i \Delta S_n} \ln P_{in}^a = \Phi_a(\sigma_a), \quad (3)$$

где  $\Phi_k$  и  $\Phi_a$  – некоторые функции;  $\sigma_k$  – инвариант тензора напряжений в точке эластомера с координатами  $x_j, y_j, z_j$  (к которой стягивается при предельном переходе объем  $\Delta V_j$ ) в момент  $t_i$  (получаемый при стремлении интервала времени  $\Delta t_i$  к нулю);  $\sigma_a$  – скалярная характеристика вектора усилий на поверхности контакта с наполнителем в точке с координатами  $x_n, y_n, z_n$  (к которой стягивается при предельном переходе элемента поверхности  $\Delta S_n$ ) в момент времени  $t_i$ . Физический смысл утверждений (1)–(3) заключается в постулировании временного вероятностного характера процесса разрушения и зависимости его только от напряжений, действующих в момент разрушения в точках, где происходит разрушение.

Логарифмируя выражение (1) и используя условия (2), (3), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \ln P_* &= \sum_i \left\{ \sum_j [\Phi_k(\sigma_k(t_i, x_j, y_j, z_j)) \Delta t_i \Delta V_j + 0(\Delta t_i \Delta V_j)] \right\} + \\ &+ \sum_i \left\{ \sum_n [\Phi_a(\sigma_a(t_i, x_n, y_n, z_n)) \Delta t_i \Delta S_n + 0(\Delta t_i \Delta S_n)] \right\}, \end{aligned}$$

которое после предельного перехода  $\Delta t_i \rightarrow 0, \Delta V_j \rightarrow 0, \Delta S_n \rightarrow 0$  (получаемого путем все более мелкого дробления объема  $V$ , поверхности  $S$  и интервала времени  $[t_0, t]$  на части), приводит к искомой зависимости

$$P_* = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \iiint_V \Phi_k dV + \iint_S \Phi_a dS \right] dt \right\}$$

Таким образом, вероятность события, противоположного отсутствию появлений на интервале времени  $[t_0, t]$  повреждений, оценивается выражением

$$P = 1 - \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left[ \iiint_V \Phi_k dV + \iint_S \Phi_a dS \right] dt \right\} \quad (4)$$

Возьмем в качестве функций, определяющих условия появления повреждений в материале, следующие зависимости:

$$\Phi_k = -\frac{1}{\kappa_k} \sigma_k^{b_k} \exp \left( -\frac{U_k}{kT} \right) H(\sigma_k) \quad (5)$$

$$\Phi_a = -\frac{1}{\kappa_a} \sigma_a^{b_a} \exp \left( -\frac{U_a}{kT} \right) H(\sigma_a), \quad (6)$$

где  $\kappa_k, \kappa_a, b_k, b_a, U_k, U_a$  – некоторые константы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура;  $H$  – функция Хевисайда. Выражение (6) отвечает за описание адгезионного разрушения на поверхности контакта с частицами наполнителя и выбрано в виде, аналогичном выражению (5). В свою очередь зависимость (5) содержит в себе информацию о когезионном разрушении матрицы в композитном материале. Ее вид выбран из требования удовлетворения формуле Бартенева. Речь идет об описании экспе-

риментов по нагружению однородного эластомерного образца без наполнителя ( $S=0$ ) постоянной по времени нагрузкой  $\sigma$ . Его долговечность (среднее время до разрушения) должна подчиняться зависимости [3]

$$\langle t \rangle = \tau \sigma^{-b_k} \exp\left(\frac{U_k}{kT}\right) \quad (7)$$

Математическое ожидание времени до разрушения

$$\langle t \rangle = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) \frac{\partial P}{\partial t} dt,$$

вычисленное с использованием конкретного вида вероятности (4), приводит к выражению

$$\langle t \rangle = \frac{\varkappa_k}{V} \sigma_k^{-b_k} \exp\left(\frac{U_k}{kT}\right)$$

В случае выбора в качестве инварианта  $\sigma_k$  средних (гидростатических) напряжений (как это будет осуществлено ниже) связь между растягивающим напряжением  $\sigma$  и инвариантом  $\sigma_k$  в одноосном нагружении осуществляется по формуле

$$\sigma_k = \frac{1}{3} \sigma$$

Таким образом, формула (7) автоматически удовлетворяется и в качестве следствия получается зависимость параметра  $\tau$  от объема образца  $V$ . Эксперименты действительно подтверждают существование подобной связи [3, 14]. Необходимая нам информация для математического моделирования экспериментов Парка и Джента содержится в формулах (4)–(6).

Рассмотрим бесконечный упругий материал, содержащий твердое сферическое включение. На границе матрица – частица наполнителя выполняются условия полного прилипания. На бесконечности приложено однородное поле нагружения. Пусть это будет одноосное растяжение вдоль оси  $z$  напряжением, равным  $\sigma_\infty$ . Вычисления осуществим в рамках линейной гуковской модели с использованием аналитического решения [15]. Однако прежде, чем применим для вычисления вероятности формулу (4), уточним в ней границы интегрирования. Поверхностный интеграл необходимо брать по всей границе сферического включения. С объемным же интегралом дело обстоит сложнее. Ниже будем осуществлять интегрирование по областям материала, наиболее опасным с точки зрения появления когезионного разрушения. Варьируя размеры этих областей, покажем, в каких частях связующего почти наверняка должны появиться разрывы эластомера, а в каких частях это практически невозможно. Как показывают эксперименты, когезионное разрушение матрицы происходит около полюсов включений [2]. Поэтому целью нашего исследования будут их окрестности (части материала, точки которых удалены на расстояние, меньшее ограничения  $r$  от ближайшего из полюсов). Другими словами, интегрирование будем осуществлять по двум сферам, центры которых находятся в полюсах твердой частицы, за исключением тех их частей, которые попадают внутрь частицы. Значение ограничения размера областей  $r$  будем изменять в пределах от нуля до радиуса включения  $R$  ( $0 \leq r \leq R$ ).

Во всех проводимых испытаниях должно наблюдаться только когезионное разрушение, когда вклад поверхностиного интеграла в формуле (4) заметно меньше вклада от объемного интеграла

$$\left| \iint_s \Phi_a dS \right| \ll \left| \iiint_v \Phi_k dV \right| \quad (8)$$

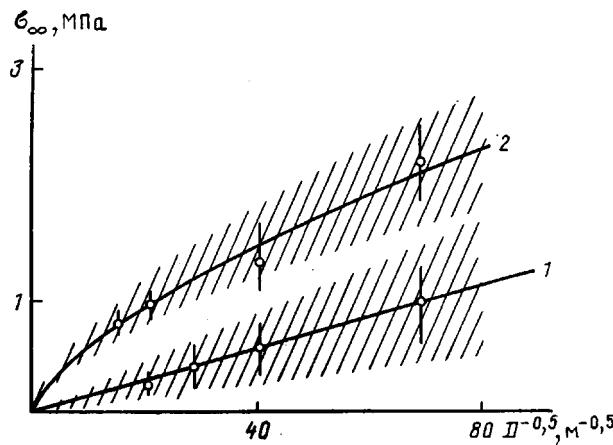


Рис. 1. Зависимость приложенных на бесконечности напряжений, вызывающих разрушения в системе включение – упругая матрица, от размеров включения при адгезионном (1) и когезионном разрушении (2). В заштрихованных областях вероятность разрушения системы равна 0,9. Сплошные линии показывают зависимость математического ожидания  $\langle \sigma_\infty \rangle$  от  $D^{-0.5}$

и, наоборот, адгезионный отрыв матрицы от поверхности наполнителя во всех экспериментах будет наблюдаться тогда, когда знак неравенства (8) изменится на противоположный

$$\left| \iiint_s \Phi_a dS \right| \gg \left| \iiint_v \Phi_k dV \right|$$

На практике это достигается специальной обработкой поверхности включения [2]. При анализе когезионной прочности значение энергетической характеристики связи матрица – включение будем принимать очень большим ( $U_a = \infty$ ), а при анализе адгезионного разрушения будем считать большой энергетическую характеристику прочности полимерной сетки ( $U_k = \infty$ ). Определяя необходимые математические выкладки, получаем, что в рамках указанного упрощения вероятность появления когезионного разрушения вычисляется по формуле

$$P = 1 - \exp(-\sigma_\infty^{b_k} R^3 c_k), \quad (9)$$

а адгезионного разрушения – по уравнению

$$P = 1 - \exp(-\sigma_\infty^{b_a} R^2 c_a), \quad (10)$$

где значение констант  $c_k$  и  $c_a$  определяются равенствами

$$c_k = \left[ \iiint_v \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_\infty} \right)^{b_k} H(\sigma_k) dV \right] \frac{(t-t_0)}{R^3 \chi_k} \exp\left(-\frac{U_k}{kT}\right)$$

$$c_a = \left[ \iint_s \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} \right)^{b_a} H(\sigma_a) dS \right] \frac{(t-t_0)}{R^3 \chi_a} \exp\left(-\frac{U_a}{kT}\right)$$

Интервал  $[t_0, t]$  в данном случае представляет собой время наблюдения, в течение которого фиксируются разрушения. Константы  $c_k$  и  $c_a$  не зависят от величины приложенной нагрузки  $\sigma_\infty$  и размера твердой частицы  $R$ .

В первую очередь покажем, как меняется адгезионная и когезионная прочность системы матрица – включение при изменении размера твердой частицы. Результаты вычисления для материала *cis*-4 [2] графически представлены на рис. 1. Для расчета использованы следующие значения констант:  $r=R$ ,  $b_k=9$ ,  $b_a=4$ . Математические выражения, характеризующие свойства материала и время наблюдения, имели следующие числен-

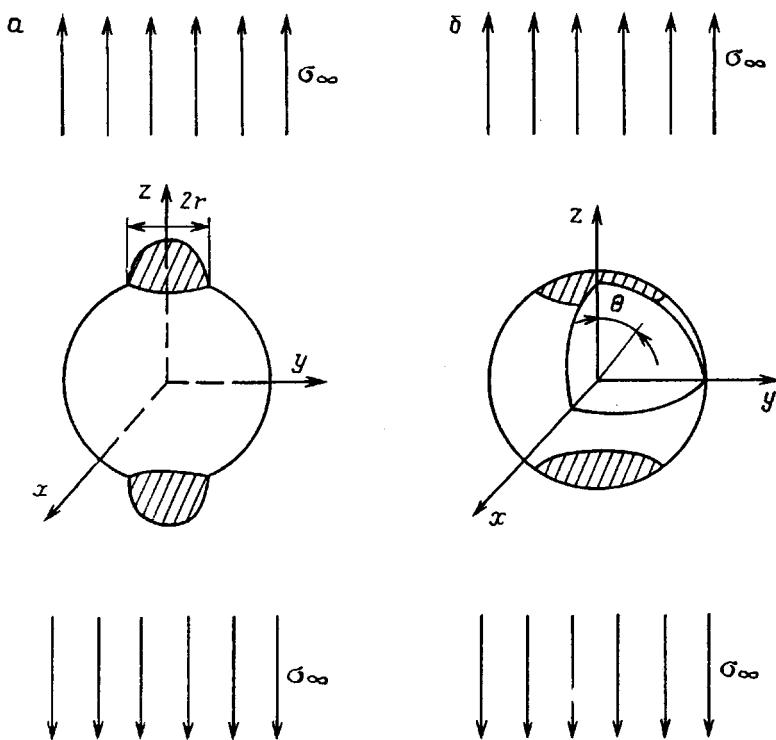


Рис. 2. Области наиболее вероятного появления повреждений в системе твердое сферическое включение – бесконечная упругая матрица при когезионном (а) и адгезионном разрушении (вероятность появления повреждений 0,9) (б)

ные значения:

$$\frac{(t-t_0)}{\kappa_k} \exp\left(-\frac{U_k}{kT}\right) = 1,56 \cdot 10^8 \text{ МПа}^{-9} \cdot \text{м}^{-3}$$

$$\frac{(t-t_0)}{\kappa_a} \exp\left(-\frac{U_a}{kT}\right) = 1,28 \cdot 10^6 \text{ МПа}^{-4} \cdot \text{м}^{-2}$$

Согласно формулам (9) и (10), зависимость математического ожидания нагрузки на бесконечности  $\sigma_\infty$ , вызывающей появление адгезионных и когезионных повреждений от диаметра твердой частицы  $D=2R$ , описывается соответственно формулами

$$\langle \sigma_\infty \rangle_a = a_a / \sqrt{D}, \quad \langle \sigma_\infty \rangle_k = a_k / \sqrt[3]{D},$$

где константы  $a_a$  и  $a_k$  для выбранного материала имеют следующие значения:  $a_a = 0,0187 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ ;  $a_k = 0,127 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/3}$ . Результаты получены при использовании в качестве инварианта тензора напряжений  $\sigma_k$  гидростатических напряжений  $\sigma_k = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$  и в качестве скалярной меры

отрывных усилий радиальных растягивающих напряжений  $\sigma_a = \sigma_{rr}$ .

Именно такой выбор определяющих параметров в формулах (5) и (6) позволяет удовлетворительно описать место появления первичного повреждения (рис. 2). На рис. 1 заштрихованы области значений напряжений  $\sigma_\infty$ , при которых с вероятностью 0,9 должно произойти разрушение связующего или его отслоение от поверхности частицы. Интервалом около экспериментальных точек отмечены границы экспериментального разброса. Анализ графической информации показывает, что математическое описание адгезионной и когезионной прочности с помощью статистической термофлуктуационной теории позволяет удовлетворительно описать экспериментальные данные по разрушению матрицы около единичного твер-

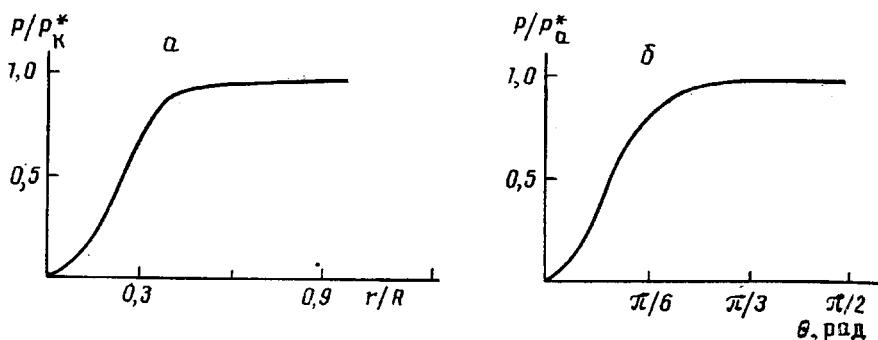


Рис. 3. Зависимость вероятности появления повреждений в упругой матрице от размеров исследуемых областей: *a* – когезионное разрушение, *б* – адгезионное разрушение.  $P_k^*$  – вероятность когезионного разрушения, вычисленного для значения  $r=R$ ;  $P_a^*$  – вероятность адгезионного разрушения, вычисленного для значений  $\theta \in [0, \pi]$

дого включения. Таким образом, она является одной из теорий, позволяющей рассчитывать масштабный эффект прочности эластомеров.

Определим размеры области наиболее вероятного появления повреждений. Для этого будем изменять границы интегрирования в выражении (4). Расчеты показывают, что границей области наиболее вероятного появления когезионного разрушения является поверхность сферы, удаленная от полюса частицы наполнителя на третью часть ее радиуса ( $r=\frac{1}{3}R$ , рис. 2, *a*). Увеличение размеров области, получаемое при из-

менении параметра  $r$ , приводит к незначительному росту вероятности когезионного разрушения (рис. 3, *a*). Это объясняется тем, что увеличение размеров области оценки прочности связующего осуществляется за счет объема материала, разрушение которого маловероятно. В свою очередь частью поверхности, в которой преимущественно должно происходить отслоение связующего, являются участки границы наполнителя, радиус-вектор точек которых образует с осью  $z$  углы  $\theta < \pi/6$  или  $> 5\pi/6$  (рис. 2, *б* и 3, *б*). Приведенные графики получены при условии приложения на бесконечности нагрузки  $\sigma_\infty$ , равной математическому ожиданию напряжений, вызывающих соответственно когезионное или адгезионное разрушение. Символами  $P_a^*$  и  $P_k^*$  обозначены вероятности разрушения, вычисленные для значений  $r=R$  и  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Интегрирование велось по областям и поверхностям как верхней, так и нижней частях и окрестностях частицы.

Необходимо отметить еще одно важное следствие. Изменяя значение энергетического взаимодействия матрицы с поверхностью наполнителя  $U_a$  (с помощью специальной обработки поверхности) можно прийти к следующей ситуации. На больших включениях будет наблюдаться адгезионное разрушение, на малых – когезионное. Статистическая термофлуктуационная теория прочности позволяет прогнозировать не только влияние масштабного фактора, но и возможную смену характера разрушения в зависимости от геометрических размеров системы. Наблюдать это явление можно, когда параметры системы  $U_a$  и  $U_k$  не отличаются значительно друг от друга (нельзя использовать упрощающее предположение  $U_a=\infty$  или  $U_k=\infty$ ).

Формула (4) дает возможность рассчитывать изменение значения разрывных усилий в зависимости от скорости нагружения системы. В проделанных выше расчетах предполагалось, что матрица на бесконечности нагружена постоянной во времени нагрузкой и время наблюдения за образцом было 10 мин. Расчеты нагружения системы с постоянной скоростью приводят к результатам, показанным на рис. 4. Статистическая термофлуктуационная теория предсказывает увеличение разрушающих напряжений при повышении скорости нагружения материала и смену характера повреждения. На оси значений скорости приложения нагрузки для включений радиусом 50 мкм выделяются три участка. При скорости нагруже-

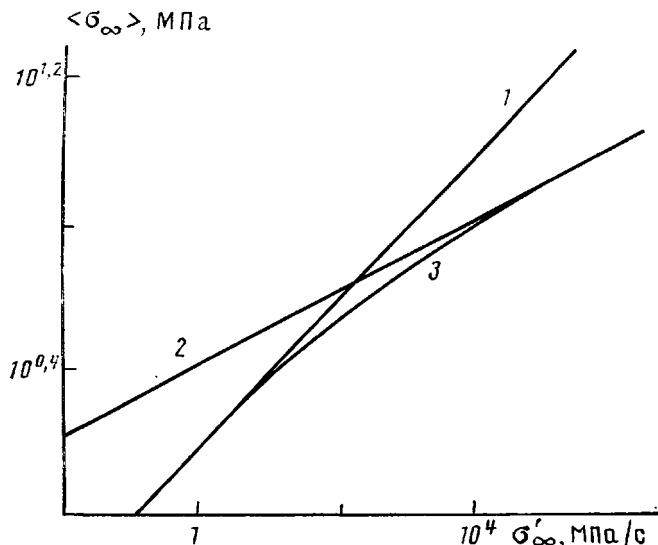


Рис. 4. Зависимость математического ожидания приложенных на бесконечности напряжений, вызывающих повреждения в системе твердая сферическая частица – упругая матрица, от скорости  $\sigma'_\infty$  ее нагружения при адгезионном  $U_k=\infty$  (1) и когезионном разрушении  $U_a=\infty$  (2); кривая 3 отвечает возможному адгезионному и когезионному повреждению. Радиус частиц 50 мкм

ния  $<1$  МПа/с возможно только адгезионное разрушение связи матрица – частица наполнителя, при значениях  $>10^5$  МПа/с – только когезионное разрушение матрицы, а в интервале от 1 до  $10^5$  МПа/с одновременно могут происходить повреждения системы обоих видов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усиление эластомеров/Под ред. Крауса Дж. М., 1968. 483 с.
2. Gent A. N., Park B. // J. Mater. Sci. 1984. V. 19. P. 1947.
3. Бартенев Г. М., Зуев Ю. С. Прочность и разрушение высокоэластических материалов. М.; Л., 1964. 388 с.
4. Бартенев Г. М. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82. № 1. С. 49.
5. Афанасьев М. М. Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев, 1953. 128 с.
6. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., 1965. 280 с.
7. Волков С. Д. Статистическая теория прочности. М., 1960. 176 с.
8. Конторова Т. А., Френкель Я. И. // Журн. техн. физики. 1941. Т. 11. № 3. С. 173.
9. Конторова Т. А., Тимошенко О. А. // Журн. техн. физики. 1949. Т. 19. № 3. С. 355.
10. Weibull W. A. // Ind. Vetenskaps Akad. Handlinder. 1939. № 151. Р. 1.
11. Энциклопедия полимеров. Т. 3/Под ред. Кабанова В. А. М., 1977. 1152 с.
12. Жуков С. Н., Куксенко В. С. // Механика полимеров. 1974. № 5. С. 792.
13. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. М., 1974. 560 с.
14. Петров В. А., Савицкий А. В. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 4. С. 806.
15. Goodier J. N. // J. Appl. Mech. 1934. № 5. Р. 39.

Институт механики сплошных сред  
АН УрО СССР

Поступила в редакцию  
11.02.91

A. L. Svistkov, L. A. Komar

#### USAGE OF THE STATISTICAL THERMOFLUCTUATION THEORY OF THE STRENGTH FOR DESCRIPTION OF CONDITIONS OF ADHESIONAL AND COHESIONAL DECAY OF THE ELASTOMER MATRIX NEAR THE SOLID SPHERIC PARTICLE

#### Summary

Features of the application of the statistical thermofluctuation theory of the strength to analysis of conditions of adhesional and cohesive fracture of the elastomer matrix near the single solid inclusion are discussed. Probabilities of fracture stresses, their dependence on inclusions dimensions and on the rate of loading are calculated. The conditions of the transition from adhesional to cohesive character of the fracture with the change of inclusions dimensions and of the loading rate are analysed.