

УДК 541.64 : 539.3

© 1990 г. А. Е. Тейшев, А. Я. Малкин

О СВЯЗИ КРИВЫХ РЕЛАКСАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ПОЛИМЕРОВ В ОБЛАСТИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Обсуждена возможность определения кривой ползучести по измеренной кривой релаксации в области линейной вязкоупругости с использованием различных методов расчета. Оценена их точность и эффективность. Наилучшие результаты получаются при использовании метода разложения исходной релаксационной кривой на сумму экспонент.

Для решения практических задач, возникающих при эксплуатации силовых изделий и конструкций из полимерных материалов, необходимо основываться на фундаментальных феноменологических соотношениях, связывающих величины напряжения и деформации в процессе деформирования. Такие соотношения, исходящие из принципа суперпозиции Больцмана, были сформулированы в виде замкнутых теорем и представлены в математическом виде [1]. Развитая теория содержит ряд точных интегральных математических выражений, позволяющих определять неизвестные вязкоупругие характеристики по известным функциям (в частности, полученным из эксперимента). Однако на практике при решении этой задачи возникают некоторые принципиальные трудности [1].

Здесь следует отметить два обстоятельства. Во-первых, использование теоретических соотношений подразумевает необходимость аппроксимации экспериментальных кривых аналитическими выражениями, причем, поскольку при вычислении соответствующих интегралов значения функции должны быть известны при изменении аргумента от 0 до ∞ , требуется экстраполяция за пределы диапазона измерения. Ясно, что как аппроксимация экспериментальных данных, так и экстраполяция за их пределы неоднозначны, что в итоге может привести к некорректности решаемой задачи. Во-вторых, даже при удачном аналитическом описании исходных экспериментальных данных часто оказывается невозможным найти исковую функцию по точному уравнению (например, оригинал преобразования Лапласа по его изображению), так что приходится использовать приближенные методы обращения интегральных преобразований [1, 2].

В связи с изложенным особый интерес приобретает проблема достоверности и удобства практического использования соотношений феноменологической теории вязкоупругости. В литературе имеется большое количество работ, посвященных этому вопросу, в которых наряду с точными рассматриваются множество различных приближенных методов, основанных на свойствах подынтегральных выражений соответствующих теоретических уравнений [3, 4]. В ряде работ предлагается тот или иной метод расчета, причем если это приближенный метод, то как правило, делается попытка оценить его погрешность, что является обычно достаточно сложной задачей [5]. Однако даже если это удается сделать, остается открытым вопрос о сравнительной эффективности различных методов обработки одних и тех же экспериментальных данных, которая зависит как от собственной ошибки метода расчета, так и от возможной некорректности решаемой задачи, обусловленной всегда существующей ошибкой эксперимента [6, 7].

Цель настоящей работы — поиск ответа на вопрос о возможности определения функции ползучести по экспериментально измеренным кривым

релаксации в рамках линейной теории вязкоупругости, исходя из сравне-
ния различных методов расчета по их точности и эффективности.

Выбор этой пары вязкоупругих функций – ползучести $\psi(t)$ и релаксации $\varphi(t)$ – обусловлен тем, что ползучесть и релаксация являются наиболее типичными режимами эксплуатации конструкционных материалов, и их показатели характеризуют работоспособность материала при длительных статических нагрузках. В настоящей работе в качестве исходной рассматривали функцию релаксации, по которой рассчитывали функцию ползучести, так как, во-первых, проведение эксперимента по релаксации менее трудоемко, и во-вторых, релаксационная кривая имеет более простую форму, следовательно, для нее проще построить обобщенную кривую [8] и сделать прогноз, который затем, если удастся, можно распространить на ползучесть.

Как хорошо известно, связь функций ползучести и релаксации в общем виде выражается следующим интегральным уравнением [1, 3]:

$$G_\infty I_0 - 1 + I_0 \varphi(t) + G_\infty [t/\eta + \psi(t)] + \int_0^t \varphi(t') [1/\eta + d\psi(t-t')/d(t-t')] dt' = 0, \quad (1)$$

где G_∞ – равновесный модуль упругости; I_0 – мгновенная податливость; t, t' – время; η – вязкость.

Решение уравнения (1) в общем виде не всегда возможно. В связи с этим предлагается ряд конкретных решений уравнения (1), основанных на использовании аналитических выражений ядер релаксации и ползучести, позволяющих удовлетворительно описывать различные экспериментальные данные [9]. В частности, такие выражения предлагали для кривых релаксации, что дает в принципе возможность расчета по ним кривых ползучести. Используя эти решения, поставим математический эксперимент, который позволит оценить их корректность и практическую значимость.

Выберем в качестве контрольной (т. е. той, по которой будем проверять корректность расчета) функции ползучести кривую, описываемую некоторым аналитическим ядром, причем таким, чтобы было известно соответствующее ему ядро релаксации. В этом случае можно с любой заранее заданной точностью по функции ползучести рассчитывать кривую релаксации. Примем полученную таким образом релаксационную кривую за исходную «экспериментальную». Далее, аппроксимировав ее различными аналитическими выражениями, воспользуемся одним из существующих точных или приближенных методов для решения обратной задачи – расчета функции ползучести по кривой релаксации. При этом целью математического эксперимента является анализ роли двух факторов – способа аппроксимации исходных экспериментальных данных и метода пересчета кривой релаксации в кривую ползучести, т. е. «экспериментальной» кривой в подлежащую определению функцию.

Если расхождение рассчитанной и исходной кривых ползучести при использовании точного метода значительно превысит величину обычной ошибки эксперимента (скажем, 10%), то это означало бы, что решаемая обратная задача некорректна, т. е. существующая ошибка исходного эксперимента в принципе не дает возможности вычислить кривую ползучести данным методом [7]. При использовании того или иного приближенного метода свой вклад в результат вносит погрешность выбранного метода, что может усилить существующую некорректность или привести к кажущейся некорректности обратной задачи.

В качестве «экспериментальных» кривых релаксации и ползучести воспользуемся зависимостями релаксационного модуля и податливости при ползучести от времени, рассчитанными с помощью ядра релаксации вида [10]

$$T(t) = At^{\alpha-1} \exp(-\beta t) \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2)$$

где A, α и β – константы.

Для разных значений параметров в широком временном интервале значения этого ядра и резольвенты приведены в виде таблиц [10]. Данные

этих таблиц были использованы в дальнейших расчетах. Для удобства изложения в дальнейшем, помня, что в качестве экспериментальных использованы табличные данные, кавычки при употреблении слова «эксперимент» будут опускаться.

Для решения сформулированной выше обратной задачи применяли два точных метода, использующих аналитическое представление функции релаксации аппроксимирующими кривыми: метод разложения на экспоненты [1] и метод аппроксимации с помощью функции Кольрауша [11], а также приближенный метод Лидермана [4]. В основе первого метода лежит известная теорема о том, что любую убывающую функцию с любой требуемой точностью можно представить суммой конечного числа экспонент, т. е.

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N \bar{G}_k \exp(-t/\bar{\theta}_k) \quad (3)$$

$$G(t) = \varphi(t) + G_\infty, \quad (3')$$

где \bar{G}_k – ординаты линейчатого релаксационного спектра, $\bar{\theta}_k$ – времена релаксации, G – релаксационный модуль [3]. Исходя из общих соотношений теории линейной вязкоупругости, связывающих спектры релаксации и запаздывания, и используя уравнения (3) и (3'), Гросс получил следующие выражения, позволяющие достаточно просто вычислить параметры спектра запаздывания, если известен релаксационный спектр [1]:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \sum_{k=1}^N \bar{G}_k \delta(\theta - \bar{\theta}_k) \\ G_k &= (1/\theta_k^2) |\bar{K}'(\theta_k)|, \\ \text{где } \theta_k &= \text{корни уравнения } \bar{K}(\theta) = 0, \text{ а} \\ \bar{K}'(\theta) &= \left[\frac{d}{d\theta} \bar{K}(\theta) \right]_{\theta_k} \\ \bar{K}(\theta) &= \left[G_\infty - \sum_{k=1}^N \bar{G}_k \bar{\theta}_k / (\theta - \bar{\theta}_k) \right] / \theta \quad (4) \\ \Phi(\theta) &= \sum_{k=1}^N G_k \delta(\theta - \theta_k) \\ \psi(t) &= \sum_{k=1}^N G_k [1 - e^{-t/\theta_k}] \\ I(t) &= \varphi(t) + I_0, \end{aligned}$$

где $F(\theta)$, $\Phi(\theta)$ – спектры времен релаксации и запаздывания соответственно; δ – дельта-функция; G_k , θ_k – параметры спектра времен запаздывания; \bar{K} – вспомогательная функция; $I(t)$ – податливость при ползучести.

Для расчета ползучести по методу Гросса (разложения на экспоненты) использовали данные по ползучести и релаксации, приведенные в табл. 10.15 работы [10], причем размерность времени в данном случае может быть любой, поскольку она совпадает с размерностью времени в реальном эксперименте, а податливость и модуль релаксации безразмерны, так как они отнесены к статическому модулю упругости. Во всех дальнейших расчетах принимали, что величина ошибки эксперимента (т. е. значений функции ползучести) в каждой точке по времени $< 10\%$. Аппроксимацию считаем адекватной, если отклонение аппроксимирующей кривой от экспериментальных значений в каждой точке по t находится в пределах этой

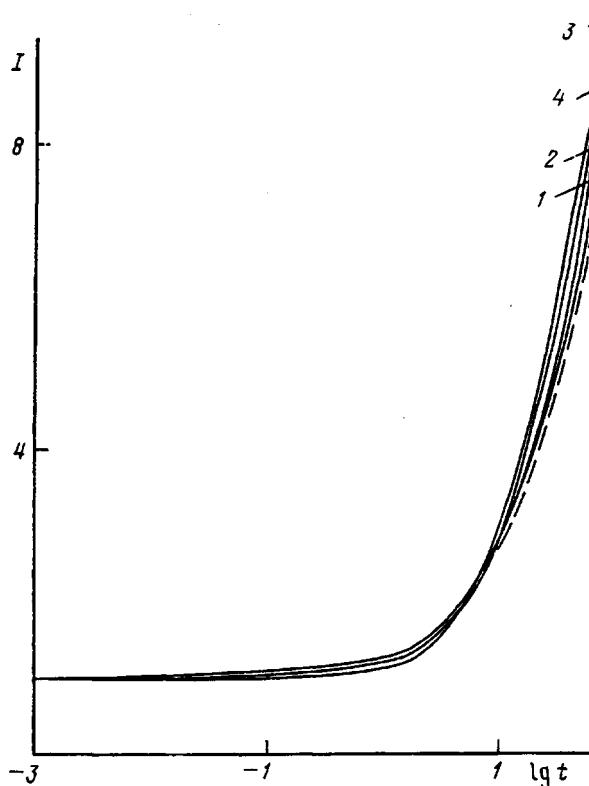


Рис. 1. Экспериментальная (штриховая линия) и расчетные (сплошные линии) кривые податливости, полученные при разложении релаксационной кривой на 4 (1), 3 (2), 2 (3) и 1 (4) экспоненциальные функции

ошибки. Последовательность вычисления функции податливости такова. Сначала экспериментальную релаксационную кривую аппроксимировали на ЭВМ с помощью уравнений (3), (3') по методу Тобольского — Мураками [12]. Заданная максимальная относительная погрешность аппроксимации в любой точке равна 10 %. Параметры рассчитанного спектра с четырьмя временами релаксации приведены в табл. 1, спектр 1 ($G_\infty=0,0625$, относительная погрешность аппроксимации $\Delta_a=1,2\%$, максимальная относительная погрешность в точке $\Delta_a^{\max}=2,5\%$). Затем по уравнениям (4) рассчитали параметры спектра запаздывания и кривую податливости.

Из рис. 1 видно, что имеет место хорошее совпадение экспериментальной и расчетной (кривая 1) кривых податливости ($\Delta=3,3\%$, $\Delta^{\max}=5,8\%$). Поскольку $G_\infty \neq 0$ ($1/\eta=0$, т. е. отсутствует пластическая составляющая деформации), количество времен в спектрах одинаково, как это и должно быть по Гроссу [1]. Как видно, спектр времен запаздывания смещен от-

Таблица 1
Результаты расчета при аппроксимации релаксационной кривой суммой экспонент

Спектр, №	Релаксационный спектр		Спектр времен запаздывания	
	время θ_k	модуль \bar{G}_k	время θ_k	податливость G_k
1	17	0,32	121	14
	5,3	0,35	8,1	0,44
	0,58	0,17	0,71	0,24
	0,05	0,06	0,053	0,07
2	16	0,43	122	14
	3,0	0,30	4,39	0,5
	0,30	0,13	0,35	0,18

носительно релаксационного спектра в сторону больших времен, причем, чем больше время, тем сильнее выражено это смещение. С точки зрения задач настоящего рассмотрения это означает, что для получения одних и тех же результатов эксперимент по ползучести должен быть заведомо продолжительнее, чем по релаксации.

Хорошо известно, что при экспериментах по измерению релаксационных свойств «теряется» некоторая часть спектра, содержащая малые времена [13]. В связи с этим, интересно выяснить, как уменьшение количества малых времен в релаксационном спектре влияет на точность определения податливости.

Расчеты показывают следующее. Исключение из спектра одного наименьшего времени в рассматриваемом случае фактически эквивалентно уменьшению диапазона эксперимента от $t=10^{-3}-10^2$ до приблизительно $t=10^{-1}-10^2$, двух — до $t=10^0-10^2$ и трех — до $t=10^1-10^2$. Из рис. 1 видно, что для спектра с тремя временами совпадение расчета и эксперимента остается все еще вполне удовлетворительным ($\Delta=5,6\%$, $\Delta_{\max}=8,4\%$), тогда как для спектров с двумя ($\Delta=10,7\%$, $\Delta_{\max}=16\%$) и одним ($\Delta=-13,2\%$, $\Delta_{\max}=27\%$) временами релаксации точность расчета явно недостаточна, поскольку она выходит за заданные пределы. Если при малых t ($10^{-3}-10^{-1}$) уменьшение количества времен в спектре не слишком сильно влияет на точность расчета (поскольку скорость ползучести мала), то при больших временах этот фактор становится существенным. Таким образом, усечение релаксационного спектра со стороны малых времен вначале заметно не влияет на расчетную ползучесть, однако по мере роста степени усечения его влияние на всю кривую податливости усиливается и проявляется особенно заметно при больших временах.

На практике часто требуется оценка ползучести в большем временном интервале, чем интервал измерений релаксации, поэтому важно выяснить возможные пределы экстраполяции расчетной кривой податливости при временах, превышающих время релаксационного эксперимента. Для этого по изложенному выше алгоритму рассчитали функцию податливости при $t=10^{-3}-10^2$, задав максимальное время эксперимента на порядок меньше ($t=10^1$), что эквивалентно удалению одного (наибольшего) времени из релаксационного спектра. Оказалось, что при $t>30$ отклонение расчета и эксперимента по ползучести превышает допустимую ошибку, которая, как уже говорилось, была задана равной 10% ($\Delta=12-16\%$, на этом участке расчетная кривая практически совпадает с кривой 3 на рис. 1), и следовательно, оказалось, что экстраполяция за пределы экспериментальных данных даже на полпорядка по времени некорректна.

Из изложенного выше следует, что выполнение требования адекватности аппроксимации эксперимента по релаксации, дает количество времен в релаксационном спектре, достаточное для выполнения расчета функции ползучести (т. е. решения обратной задачи) с заданной точностью (с той же, с которой аппроксимировали экспериментальную функцию релаксации).

Поскольку при использовании аппроксимации возможно получение различных спектров (например, при варьировании заданной точности), важно понять, каким образом это обстоятельство может повлиять на расчетную кривую ползучести. Чтобы пояснить ответ на данный вопрос, была проведена аппроксимация с меньшей, чем ранее, заданной точностью, а именно 15% (табл. 1, спектр 2 с тремя временами релаксации, $\Delta_a=3,1\%$, $\Delta_{a\max}=7\%$). Несмотря на то, что полученные при этом спектры релаксации и запаздывания (спектр 2) существенно отличаются от определенных ранее (спектр 1), экспериментальные и расчетные кривые податливости, как и в первом случае, совпадают с высокой степенью точности ($\Delta=4,0\%$, $\Delta_{\max}=6,5\%$), что свидетельствует об устойчивости решения обратной задачи к изменению релаксационного спектра в пределах, определяемых точностью исходного эксперимента.

Итак, использование метода Гросса (разложения на экспоненты) позволяет рассчитать кривую ползучести по измеренной кривой релаксации с той же точностью, с которой проводился исходный эксперимент, при усло-

вии адекватного аналитического описания эксперимента по уравнениям (3), (3'), т. е. обратная задача оказывается корректной (при $t=10^{-3}-10^2$).

Второй точный метод, исследуемый в настоящей работе, состоит в аппроксимации данных по релаксации функцией Кольрауша и использовании в последующих расчетах соответствующих ей ядер ползучести и релаксации. Функция Кольрауша имеет вид

$$\varphi(t) = A_k \exp(-\gamma t^{\alpha_k}), \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad (5)$$

причем, как и ранее, справедливо уравнение (3'). Для функции (5) ядро релаксации выражается следующим образом [14]:

$$T(t) = A_k \alpha_k \gamma \exp(-\gamma t^{\alpha_k}) / t^{1-\alpha_k}$$

Соответствующее ядро ползучести записывается так [11]

$$K(t) = \frac{\exp(-\gamma t^{\alpha_k})}{t^{\alpha_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_k \alpha_k \gamma \Gamma(2-1/\alpha_k)]^n t^{n(2\alpha_k-1)}}{\Gamma[n(2-1/\alpha_k)]}, \quad (6)$$

причем

$$\psi(t) = \int_0^t K(\theta) d\theta \quad (7)$$

При расчете по этому методу релаксационную кривую аппроксимировали с помощью уравнений (5), (3') на ЭВМ собственным методом, представив задачу поиска параметров функции (5) как последовательность задач одномерной оптимизации (в качестве исходных использованы данные табл. 10.11 работы [10]). При этом оказалось, что выполнение условия адекватности аппроксимации не позволяет определить искомые параметры γ и α_k единственным образом, а только дает возможность найти допустимый достаточно широкий интервал изменения параметров функции Кольрауша $\gamma=0,364-0,222$, $\alpha_k=0,552-0,822$. Чтобы установить влияние разброса значений α_k и γ на результаты расчета, кривые податливости определяли по уравнениям (6), (7) для трех пар α_k и γ , а именно границ полученного интервала и одного промежуточного значения.

Из приведенных на рис. 2 и в табл. 2 результатов расчета видно, что наличие ошибки (до 10%) в исходном эксперименте, следствием чего является неопределенность значений параметров используемой для аппроксимации исходной кривой $\varphi(t)$ функции Кольрауша, оказывает чрезвычайно сильное влияние на результатирующую расчетную кривую податливости, причем совпадение расчета с экспериментом более или менее удовлетворительно только для кривой 2. Но выбор значений параметров, используемых для построения этой кривой, был произвольным (в установленном диапазоне значений), т. е. здесь имеет место типичная некорректность обратной задачи, когда варьирование исходных экспериментальных данных даже в небольшом диапазоне приводит к расчетным кривым, не имеющим ничего общего с истинной. Чтобы избавиться от возникающей некорректности, необходимо иметь некоторую априорную информацию о кривой ползучести. Если такой информации нет (а ее обычно нет),

Таблица 2

Результаты расчета по методу, использующему фракцию Кольрауша
($G_{\infty}=0,3125$; $A_k=0,6675$)

Кривая, № (по рис. 2)	$\Delta_a (\Delta_a^{\max})$, % для исходной экспериментальной кривой	γ	α_k	$\Delta_a (\Delta_a^{\max})$, % для расчетной кривой ползучести
1	2,0 (5,2)	0,364	0,552	45,4 (75,2)
2	1,8 (2,8)	0,33	0,6	8,0 (15,0)
3	5,7 (9,2)	0,222	0,822	10,8 (26,2)

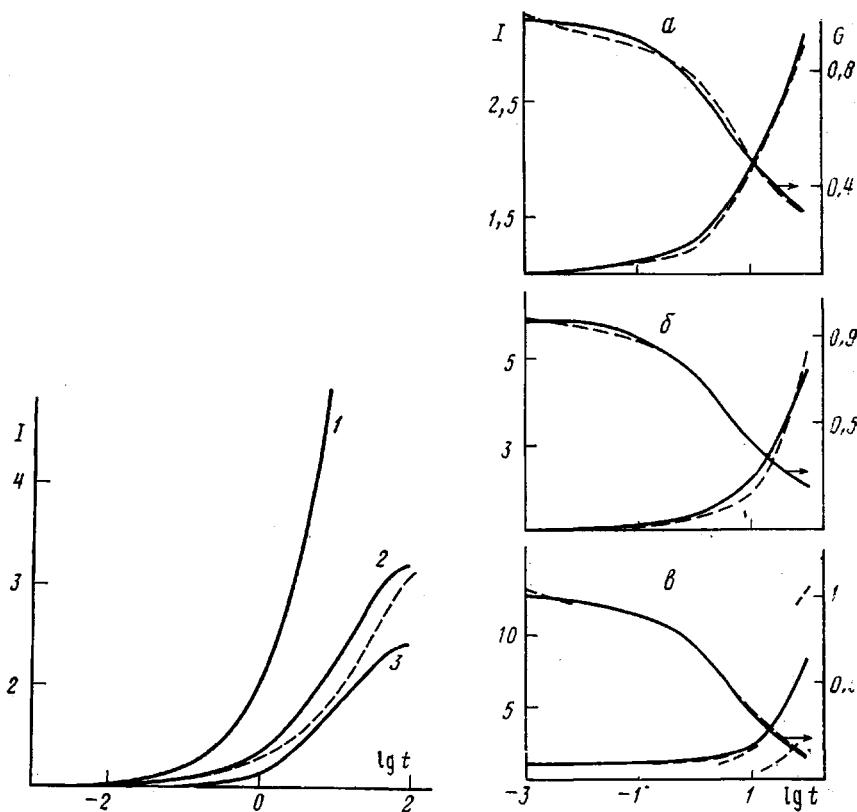


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 2. Экспериментальная (штриховая линия) и расчетные (сплошные линии) кривые податливости, полученные по методу Кольрауша. Номера кривых – по табл. 2

Рис. 3. Экспериментальные и расчетные кривые релаксации и податливости, полученные при различных значениях параметра A : 0,0935 (а), 0,11 (б), 0,127 (в). Сплошные линии: для релаксации – исходный эксперимент, для ползучести – контрольный эксперимент. Штриховые линии: для релаксации – аппроксимация, для ползучести – результаты расчета численным методом Лидермана

то очевидно, что метод Кольрауша для пересчета кривой релаксации в ползучесть использовать не имеет смысла.

В рамках настоящей работы существенно также выяснить, можно ли использовать для решения поставленной задачи какой-либо из известных приближенных методов. Один из таких методов основан на следующем приближенном соотношении между $G(t)$ и $I(t)$ [4]:

$$I(t) = \sin m\pi / m\pi G(t), \quad (8)$$

полученном из известного фундаментального уравнения

$$\int_0^t G(\theta) I(t-\theta) d\theta = t$$

в предположении, что $\lg G(t)$ – кусочно-линейная функция $\lg t$, а m – значения тангенса угла наклона этой функции. В работе [4] проведено сравнение экспериментальных данных по релаксации напряжения и результатов расчета релаксационного модуля по формуле (8) для ПИБ в широком временном диапазоне и показано хорошее совпадение между ними.

Однако полученные нами результаты указывают все же на ограниченную применимость этого метода. Так, даже при чисто умозрительном подходе видно, что выражение (8) применимо только для $m < 1$, поскольку при $m > 1$ числитель выражения (8) становится отрицательным, что лишено физического смысла. Характер и точность результатов могут также су-

щественно меняться, когда величина m становится больше 0,5, так как в этой точке функция $\sin m\pi$ проходит через максимум.

Для более детальной проверки адекватности метода, основанного на использовании формулы (8), в качестве исходных экспериментальных кривых были взяты три кривые релаксации с различными значениями параметра A в уравнении (2), а значения параметров α и β сохранялись постоянными: $\alpha=0,4$; $\beta=0,05$ для всех кривых. Следовательно, для трех кривых различаются интервалы изменения m . Эти исходные экспериментальные кривые аппроксимировали кусочно-линейными функциями ($\Delta_{\text{макс}}=2,5\%$) и затем рассчитали податливость по уравнению (8). Оказалось, что при малых $m < 0,2$ совпадение расчета и эксперимента очень хорошее (рис. 3, а, $\Delta=2,6\%$, $\Delta_{\text{макс}}=5,6\%$), при $0,2 < m < 0,4$ сходимость результатов остается удовлетворительной (рис. 3, б, $\Delta=7,4\%$, $\Delta_{\text{макс}}=15,8\%$), а при $m > 0,4$ расчетная кривая податливости очень сильно отличается от экспериментальной (рис. 3, в, $\Delta=32,4\%$, $\Delta_{\text{макс}}=74,2\%$), что, очевидно, объясняется влиянием собственно ошибки применяемого метода. Следовательно, предположение о значительном влиянии величины m на характер получаемых результатов подтвердилось, причем применение метода Лидермана корректно только при $m < 0,4$.

Итак, обратная задача расчета функции ползучести по релаксационной кривой в общей постановке не является некорректной. Однако возможность адекватного определения функции ползучести зависит от способа аппроксимации экспериментальных данных с помощью того или иного выбранного аналитического выражения. Использование метода Гросса (разложение исходной релаксационной кривой на сумму экспонент) позволяет решить ее с требуемой точностью. Тем не менее это не означает, что любой метод аналитической аппроксимации пригоден для этой цели, так, в частности, непригодным является метод, использующий функцию Кольрауша. Приближенный метод численного расчета Лидермана дает хорошие результаты только в области медленной релаксации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gross B. // Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Paris, 1953. 74 p.
2. Белов М. А., Богданович А. Е. // Механика полимеров. 1976. № 5. С. 864.
3. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. // Реология полимеров. М., 1977. 440 с.
4. Ferry J. D. // Viscoelastic Properties of Polymers. N. Y., 1980. 535 p.
5. Schwarz F. R., Struik L. C. E. // Advances Molecular Relaxation Processes. 1967–1968. № 1. Р. 201.
6. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102. № 3. С. 345.
7. Малкин А. Я., Тейшев А. Е. // Высокомолек. соед. А. 1987. Т. 29. № 10. С. 2230.
8. Уржумцев Ю. С. // Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М., 1982. 222 с.
9. Огibalов П. М., Малинин Н. И., Нетребко В. П., Кишкин Б. П. // Конструкционные полимеры. М., 1972. 322 с.
10. Колтунов М. А. // Ползучесть и релаксация. М., 1976. 277 с.
11. Колтунов М. А. // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1967. С. 640.
12. Тобольский А. // Свойства и структура полимеров/Пер. с англ. под ред. Слонимского Г. Л., Бартенева Г. М., М., 1964. 322 с.
13. Малкин А. Я., Аскадский А. А., Коврига В. В. // Методы измерения механических свойств полимеров. М., 1978. С. 12.
14. Бронский А. П. Прикл. математика и механика. 1941. Т. 5. № 1. С. 23.

Научно-производственное
объединение «Пластмассы»

Поступила в редакцию
04.07.89

A. Ye. Teishev, A. Ya. Malkin

ON THE RELATION BETWEEN RELAXATION CURVES AND CREEP OF POLYMERS IN THE REGION OF LINEAR VISCOELASTICITY

Summary

The possibility to determine the creep curve from the measured relaxation curve in the region of linear viscoelasticity using various calculation methods is discussed. The efficiency and accuracy of these methods are evaluated. The best results are obtained by the method of expansion of the initial relaxation curve into an exponents sum.